L’évaluation de l’incertitude de mesure et la méthode GUM

sujet aussi appelé
… **calcul d’incertitude**
… **propagation des erreurs**

Catégories d’erreurs

Rappel des notions

Catégorie d'erreur	Autre désignations	Abréviation
1. Erreurs systématiques connues	Erreur corrigible	$+\Delta a$ ou $-\Delta a$
2. Erreurs systématiques inconnues	Erreur de tolérance	Δa
3. Erreurs aléatoires	Erreur de dispersion Ecart-type	Mesures dans les intervalles 1σ , 2σ , 3σ ,
4 .Erreurs grossières	Valeurs exceptionnelles	Mesures en dehors de l'intervalle 3σ

Erreurs systématiques connues (en principe)

Les erreurs systématiques connues d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe.

Les normes DIN1319 en fournissent d'autres désignations telles que:

- erreurs systématiques avec signe connu,
- erreurs systématiques pures,
- erreurs corrigeables.

Les erreurs systématiques connues peuvent être corrigées dans le résultat.
D'un point de vue statistique, la mesure corrigée (signe pris en compte) est plus proche de la vraie valeur que la valeur non corrigée.
Lorsque la correction a été effectuée, les erreurs systématiques connues ne font plus partie de l'indication d'incertitude de mesure.

Exemples d’erreurs systématiques connues

- Les erreurs de graduation d'échelle sont manifestement des erreurs systématiques.
- Une cale-étalon qui est plus longue de 0,7 um que la valeur nominale indiquée.
- Une mesure de longueur effectuée à la température de 25°C au lieu de la température de référence de 20°C; cela produit une erreur systématique à la suite de la dilatation thermique de l'objet.
- La crémaillère et la roue dentée d'un comparateur mécanique possèdent un rapport erroné.
- Un palmer possède des touches de palpage présentant une usure.
- Une montre avance de 2 minutes. Dans ce cas, l'erreur est positive et la correction négative.
- Le tachymètre d'une voiture présente une indication de 5 km/h trop élevée dans un certain secteur.
- Un voltmètre possède un facteur d'amplification erroné ou indique une valeur trop élevée de 0,1V dans toutes ses mesures.
- Un niveau à bulle possède un tube incorrectement installé; une correction est nécessaire.

Erreurs systématiques inconnues ou **erreurs de tolérance**

- Les erreurs systématiques inconnues sont typiquement les tolérances des instruments de mesures.
- Les erreurs systématiques inconnues sont donc transmises avec le signe ±.
- Les erreurs systématiques inconnues ne peuvent normalement pas être diminuées par détermination de leur valeur moyenne.

Exemples d’erreurs systématiques inconnues

- Les graduations de l'échelle analogique d'un microscope de mesure possèdent une tolérance de positionnement de ±3um -> (esi).
- La vis micrométrique d'un palmer possède une tolérance connue du pas de 0,3um. On ne sait cependant pas si le pas est trop grand ou trop petit.
- Dans le cadre d'une mesure de longueur, la température de l'objet n'est pas mesurée. On sait cependant qu'au cours des mesures, la température se trouvait dans la tolérance de ±1°C par rapport à la température de référence de 20°C.
- Une jauge possède une grandeur nominale de 30,000mm et une indication de tolérance de ±1um.
- Les indications de tolérance d'un dessin technique.

Erreurs aléatoires

Les erreurs aléatoires sont dues à des fluctuations des conditions environnementales au cours de la mesure.

Les erreurs au cours d'une série de mesures sont par conséquent inconnues, tant du point de vue de leur intensité que de leur signe.

On dit que les mesures fluctuent autour de leur valeur moyenne.

On qualifie ces erreurs aléatoires par leur écart-type.

Lors de mesures répétées et affectées d'erreurs aléatoires au cours d'une série, on trouve que:

- Les erreurs aléatoires fluctuent de **manière imprévisible**.
- Les mesures d'une même série fluctuent **par rapport à leur valeur moyenne**.
- **A moins que l'histogramme des mesures ne prouve le contraire**, on considèrera que la dispersion des erreurs aléatoires obéit en règle générale à une répartition donnée par la courbe en cloche de Gauss (= distribution normale).

Exemples d’erreurs aléatoires

- Les jeux des roulements ainsi que les flexions d'arbres de dispositifs mécaniques
- Les jeux d'articulations de palpeurs
- Les erreurs de lecture des graduations d'un microscope de mesure en raison d'une netteté insuffisante de ces dernières.
- Des erreurs de parallaxe lors de la lecture d'instruments analogiques (multimètres,…)
- Des erreurs de positionnement d'un palpeur sur l'objet à mesurer au cours d'une série de mesures.
- Force de palpage inconstante d'un palmer résultant du fait de la non utilisation de la molette à friction assurant une force constante.
- Fluctuation de la température ambiante par exemple à la suite de la régulation thermostatique ou par ouverture et fermeture répétée d'une porte du local de mesure. Une fluctuation de la température de l'objet à mesurer peut également intervenir à la suite d'une manutention plus ou moins longue de ce dernier avec la main ou le doigt.
- Influence de la fluctuation de champs électrique et magnétique sur l'indicateur d'appareils électriques en raison de diverses causes possibles: proximité d'autres instruments de mesure, ascenseur, véhicules électriques de transport, téléphones mobiles, ordinateurs,…
- Bruit de fond d'instruments électroniques produisant des fluctuations du signal transmis.
- Fluctuations de la tension d'alimentation dans les instruments de mesure.
- Influence de vibrations mécaniques sur l'instrument de mesure.

Erreurs aléatoires:
cas d’un échantillon tiré d’une population

Par exemple quand on réalise N mesures d’une même grandeur.

(N.B. La population est théoriquement infinie puisqu’on pourrait faire autant de mesures qu’on désire …)

La situation est caractérisée par les paramètres suivants:

- Moyenne de l’échantillon **μ**
  - Cette moyenne est elle-même affecté d’une incertitude.
- Ecart type de l’échantillon **σ**
  - L’écart type est également affecté d’une incertitude puisqu’il variera d’un échantillon à l’autre.
  - Ecart type de la moyenne $\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
- Facteur d’élargissement k en fonction d’un intervalle de confiance désiré. L’incertitude pour un niveau de confiance donné sera:
  - Incertitude = $\pm\, k \cdot \boldsymbol{\sigma}$

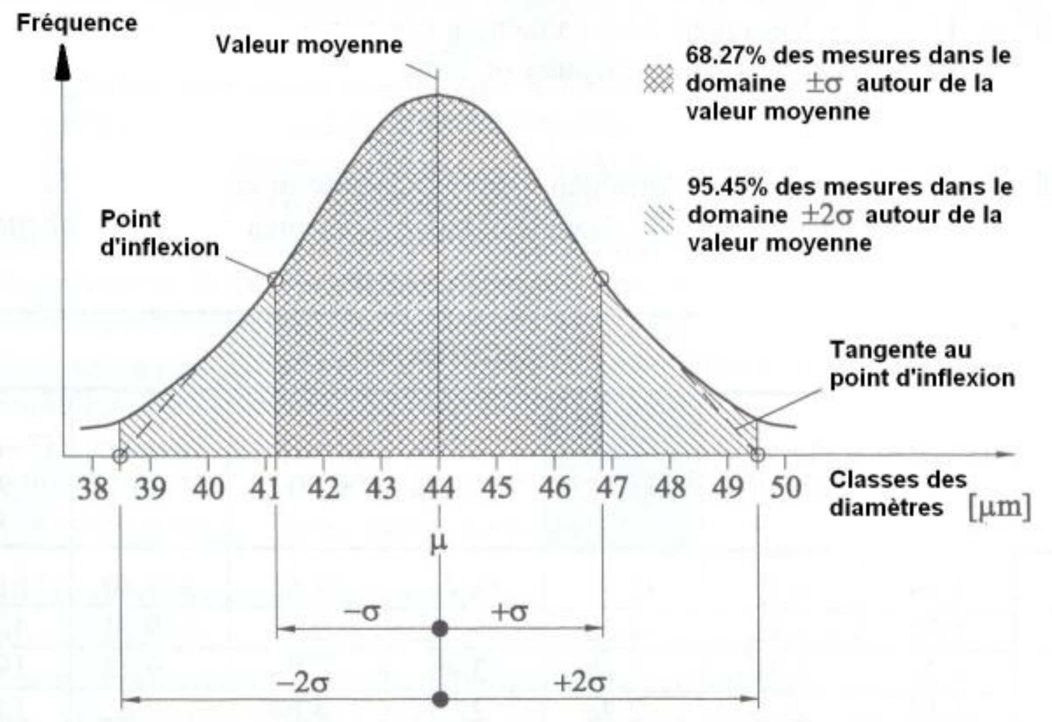
Rappel:
niveau de confiance des erreurs aléatoires

Le niveau de confiance en % correspond à la probabilité qu'une mesure se trouve dans un certain domaine de confiance sous la courbe de Gauss.

Le niveau de confiance caractérise donc le domaine de dispersion des mesures entachées d'erreurs aléatoires par rapport à la valeur moyenne de la série de mesures concernée.

Un niveau de confiance de par exemple $(1-\alpha) = 95.45\%$ signifie qu'une mesure va se trouver dans le domaine de deux écart-type de part et d'autre de la valeur moyenne avec une probabilité de 95.45%.

N.B. α est ici la probabilité résiduelle, qui englobe donc les valeurs estimés «improbables» par l'expérimentateur



Intervalle et niveau de confiance

Lorsque le caractère statistique a une distribution normale gaussienne, donc au moins grossièrement en forme de cloche :

- Dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma]$, on trouve **68%** de la population.
- Dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma ; \overline{x} + 2\sigma]$, on trouve **95%** de la population.
- Dans l'intervalle $[\overline{x} - 3\sigma ; \overline{x} + 3\sigma]$, on trouve **99,7%** de la population.

On appelle ces intervalles
les **plages de normalité au niveau de confiance** de

1. 68% ou 1-sigma,
2. 95% ou 2-sigma,
3. 99,7% ou 3-sigma.

Facteur d'élargissement *k* en fonction de *n* et du niveau de confiance (1-α) pour une (seule) variable gaussienne

Les considérations précédentes sont strictement valables pour une **distribution gaussienne connue**, caractérisée par

une moyenne et un écart type sans incertitude.

Dans ce cas on aura les niveaux de confiance suivants

68% pour ± 1-sigma, donc facteur d'élargissement *k* = 1

95% pour ± 2-sigma, donc facteur d'élargissement *k* = 2

99,7% pour ± 3-sigma , donc facteur d'élargissement *k* = 3

Ce sera en général le cas pour une distribution de population (*N* très grand).

Par contre pour une **distribution de mesures** tirées d'un **échantillon**, il faut tenir compte que la fois la moyenne et écart type sont eux-mêmes **sujets à incertitude** .

On comprend donc qu'alors l'incertitude des mesures (individuelles ou moyenne de l'échantillon) pour un niveau de confiance donné soit affectée par des facteurs d'élargissement supérieurs au précédents.

Facteur d’élargissement *k* en fonction de *n* et du niveau de confiance (1-α) pour une (seule) variable gaussienne

Si l'on a peu d'échantillons (typiquement ≤ 30), il faut utiliser un coefficient ***k*** plus grand pour prendre en compte l'erreur faite sur la détermination de μ et de σ.

L’application de la **loi statistique de Student** permet de calculer le facteur d’élargissement *k* en fonction à la fois de *n* et du niveau de confiance (1-*a*).

Les valeurs de *k* pour l’hypothèse d’une distribution normale sont données à la page suivante.

Nombre de mesures dans la série	Niveau de confiance (1-α)						
	68.27%	**90.00%**	**95.00%**	**95.45%**	**99.00%**	**99.73%**	**99.98%**
2	1.84	6.31	12.71	18.44	63.66	235.80	761.40
3	1.32	2.92	4.30	4.93	9.93	19.21	42.30
4	1.20	2.35	3.18	3.48	5.84	9.22	19.77
5	1.15	2.13	2.78	2.98	4.60	6.62	12.48
6	1.11	2.02	2.57	2.73	4.03	5.51	9.77
7	1.09	1.94	2.45	2.61	3.71	4.90	7.51
8	1.08	1.90	2.37	2.50	3.50	4.53	6.78
9	1.07	1.86	2.31	2.42	3.37	4.28	6.22
10	1.06	1.83	2.26	2.37	3.25	4.09	5.89
20	1.03	1.73	2.09	2.18	2.86	3.45	4.76
30	1.02	1.70	2.05	2.13	2.76	3.28	4.47
50	1.01	1.68	2.01	2.08	2.68	3.16	4.23
100	1.00	1.66	1.98	2.04	2.63	3.08	4.12
200	1.00	1.65	1.97	2.02	2.60	3.04	4.06
$N \rightarrow \infty$	1.00	1.65	1.96	2.00	2.58	3.00	4.00

Le tableau précédent permet en principe de calculer l’incertitude pour le cas d’une seule variable aléatoire gaussienne.

En pratique, une mesure sera en général affectée par plusieurs types d’erreurs – systématiques, tolérance, aléatoires – d’origine différente, ce qui va rendre la situation plus complexe.

Entre donc la **méthode GUM** …

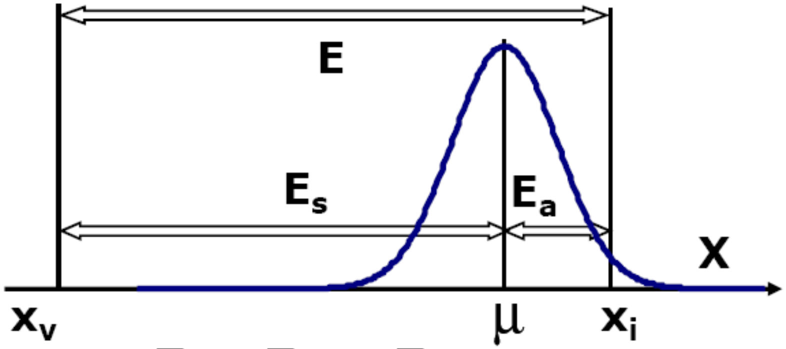
Le GUM: une convention internationale

- GUM : **G**uide to the expression of **U**ncertainly in **M**easurement (1993)
- Une norme ISO (International Standardisation Organisation)
  GUM : Guide to the expression of Uncertainly in Measurement (1993)
- Version française : Norme Française X 07- 020 AFNOR Août 1999

L'hypothèse fondamentale de la mesure selon GUM

Approche empirique

x_v valeur vraie
x_i résultat brut d'une mesure
μ moyenne d'une infinité de résultats bruts



- Tout résultat de mesure x_i est entaché d'erreur : $E = E_a + E_s$

erreurs aléatoires $E_a = x_i - \mu$ **réduites** par **échantillonnage**
erreurs systématiques $E_s = \mu - x_v$ **réduites** par **corrections**

- Soit X un **résultat corrigé** = résultat dont les erreurs aléatoires et systématiques ont été <u>réduites</u>

- Mais **Réduites** ≠ **Éliminées** : des erreurs résiduelles subsistent, inconnues, imprévisibles.

Si on répète plusieurs fois le processus de mesure, on trouve des résultats corrigés dispersés aléatoirement.

L’hypothèse fondamentale de la mesure selon GUM

- **Les erreurs de tolérance sont assimilées à des erreurs aléatoires.**

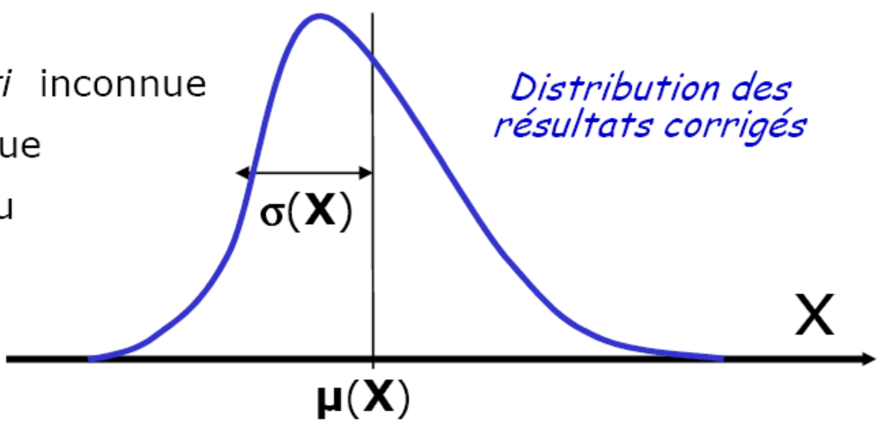
- **Ainsi donc le résultat de mesure corrigé est une variable aléatoire.**

La variable aléatoire **X** « *Résultat corrigé* »

Comme toute variable aléatoire, X présente :

- **Une loi de probabilité** *a priori* inconnue
- **Une moyenne** **μ(X)** inconnue
- **Un écart-type** **σ(X)** inconnu

Et la valeur vraie dans tout ça ?



Valeur vraie (d'une grandeur) : Valeur compatible avec la définition d'une grandeur particulière donnée. [VIM 1.19]

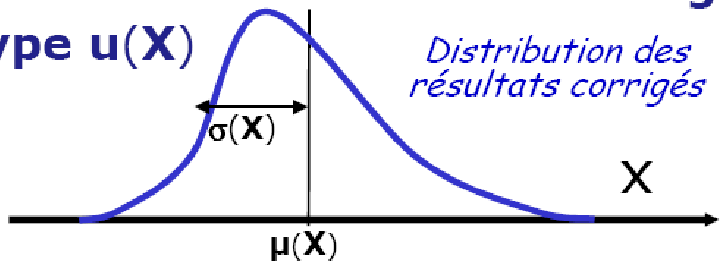
Précision du VIM : L'article indéfini " *une* " plutôt que l'article défini " *la* " est utilisé en conjonction avec " *valeur vraie*" parce qu'il peut y avoir plusieurs valeurs correspondant à la définition d'une grandeur particulière donnée.

Incertitude de mesure : Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. [VIM 3.9]

Précision du VIM : Ce paramètre peut être par exemple un écart type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi largeur d'un intervalle de confiance déterminé.

$\mu(\mathbf{X})$ sera **estimée par** la **valeur particulière** x **d'un résultat corrigé**

$\sigma(\mathbf{X})$ sera **estimé par** l'**incertitude type u**($\mathbf{X}$)



Démarche simplifiée du GUM en six étapes

1) Analyser le processus de mesure

2) Modéliser le processus de mesure de **y**

3) Estimer $\mu(X_i)$ et $\sigma(X_i)$ des variables aléatoires X_i

4) Calcul des estimations de $\mu(Y_i)$ et $\sigma(Y_i)$

5) Calcul du nombre de degrés de liberté ν et du facteur d'élargissement k

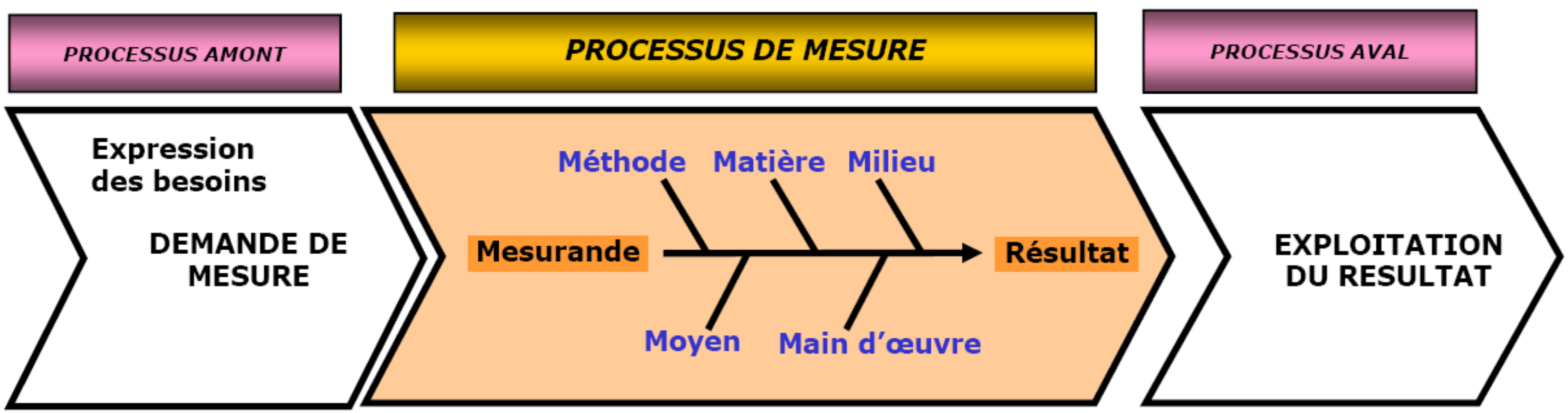
6) Expression finale du résultat de mesure

Démarche simplifiée du GUM en six étapes

1) Analyser le processus de mesure

Définir le processus de mesure

- Définir le **besoin** : Pourquoi veut-on cette mesure ?
- Définir le **mesurande** : Que mesure t'on ?
- Définir l'**exactitude souhaitée** : Quelles contraintes ? (norme, budget, exactitude …)
- Définir le **processus de mesure** : Comment procéder vu les points précédents ?



Recenser les sources d'erreurs de mesure affectant le mesurage du mesurande **y**

Méthode des 5 M : **M**éthode, **M**atière, **M**ilieu, **M**oyen, **M**ain d'œuvre

2) Modéliser le processus de mesure de **y**

Modèle mathématique du processus de mesure : $y = f(x_1, \ldots, x_N)$

Mesurande= f(*Constante d'appareil, Dérive, Grandeurs d'influence, Corrections …*)

- Réduire les erreurs systématiques par des corrections de sorte que l'erreur résiduelle affectant chaque x_i soit purement aléatoire.
- La décision d'ignorer une erreur *a priori* négligeable devrait reposer sur des résultats chiffrés.
- Si une des grandeurs x_i du modèle est nulle surtout ne pas l'éliminer car son incertitude, quant à elle, n'est pas nulle.

Calculer les coefficients de sensibilité de y pour chaque x_i

- Le calcul des $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sert à l'élaboration des incertitudes.
- Si on connaît l'équation liant y et x_i alors on dérive y par rapport à x_i.
- Si on ignore la forme de l'équation $y(x_i)$ alors on la détermine expérimentalement et on détermine la pente au point de la mesure.

3) Estimer $\mu(X_i)$ et $\sigma(X_i)$ des variables aléatoires X_i

La variable aléatoire X_i « *Résultat de mesure de la grandeur x_i* »

A chaque grandeur x_i du modèle mathématique du processus de mesure **$y=f(x_1, \ldots, x_n)$** correspond une variable aléatoire **X_i** $\begin{cases} \text{de moyenne } \boldsymbol{\mu(X_i)} \\ \text{d'écart type } \boldsymbol{\sigma(X_i)} \end{cases}$

Méthode d'estimation statistique = Méthode A

- **Faire de la grandeur x_i un échantillon de taille n**
- **Estimer $\mu(X_i)$ par la moyenne d'échantillon $\bar{x}$**

Si on veut caractériser la dispersion des valeurs X individuelles :

- **Estimer $\sigma(X_i)$ par l'incertitude type** **$u(x_i) = s(X_i)$** avec

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

(incertitude-type d'une mesure individuelle)

Si on veut caractériser la dispersion des moyennes $\bar{X}$ d'échantillon :

- **Estimer $\sigma(\bar{X}_i)$ par l'incertitude type** **$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \dfrac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$**

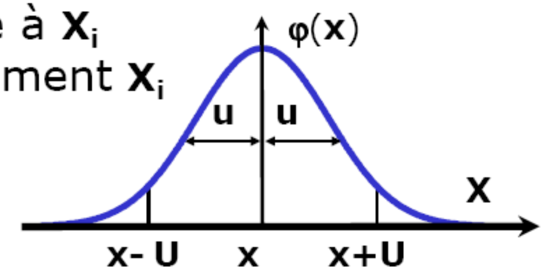
(incertitude-type de la valeur moyenne)

Méthode d'estimation non statistique = Méthode B

- **Estimer $\mu(X_i)$ à partir de :** Certificat d'étalonnage, Constat de vérification, Valeur trouvée dans la littérature, Notice constructeur, Archives de production …
- **Estimer $\sigma(X_i)$ à partir :**
  - $\rightarrow$ de l'**identification de la loi de probabilité** associée à X_i
  - $\rightarrow$ des **valeurs extrêmes** que peut prendre physiquement X_i

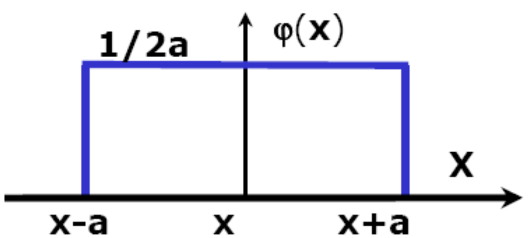
Loi normale .... $u_B(x) = \dfrac{U}{k}$

- certificat d'étalonnage COFRAC k=2
- estimation personnelle raisonnable k=3
- certaines archives de production k



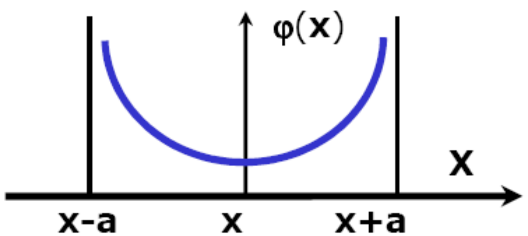
Loi uniforme (= loi rectangle) .... $u_B(x) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

- résolution d'un affichage numérique
- constat de vérification (= classe d'exactitude)
- grandeur bornée par deux extrema identifiés.
- phénomène d'hystérésis.
- dérive supposée d'un étalon.



Loi en U (= loi dérivée d'arcsinus) .... $u_B(x) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

- grandeur oscillant entre deux extrema de façon sensiblement sinusoïdale.



4) Calcul des estimations de $\mu(Y_i)$ et $\sigma(Y_i)$

Le modèle mathématique appliqué aux variables aléatoires est :

$Y=f(X_1, \ldots, X_N)$ on peut alors estimer $\mu(Y)$ et $\sigma(Y)$ par y et $u_c(y)$

Avec un développement limité à l'ordre 2 et pour des grandeurs non corrélées :

Estimateur de $\mu(Y)$ $$y \approx f(\mu_1, \ldots, \mu_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot u^2(x_i)$$

Estimateur de $\sigma(Y)$ $$u_c(y) \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] \cdot u^2(x_i)\, u^2(x_j)}$$

Avec un développement limité à l'ordre 1 et si Y est proche de la linéarité sur un intervalle de l'ordre de 2 à 3 fois l'écart type :

Estimateur de $\mu(Y)$ $y \approx f(\mu_1, \ldots, \mu_N)$

Estimateur de $\sigma(Y)$ $$u_c(y) \approx \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 \cdot u^2(x_1) + \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_N}\right]^2 \cdot u^2(x_N)}$$

(moyenne quadratique des erreurs dues à chaque source/cause)

- La valeur **u**(y) est appelée **incertitude-type** du mesurande *y*.
- Bien que l'incertitude-type composée **u**(*y*) puisse convenir pour quantifier l'incertitude d'un résultat de mesure, il est pratiquement aussi toujours nécessaire de donner une **mesure de l'incertitude qui définisse**, autour du résultat de mesure, **un intervalle à l'intérieur duquel on puisse trouver une fraction donnée** de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande.
- On peut définir un intervalle $[y - U\,;\,y + U]$ tel que la probabilité P que la valeur mesurée appartienne à cet intervalle est $P = 1-\alpha$ ou α est le seuil de confiance ($0 \le \alpha \le 1$) et ($1-\alpha$) le niveau de confiance. On définit ainsi un intervalle de confiance de largeur $\pm U$ autour de la valeur moyenne du mesurande.
- ***U*** est appelé **incertitude élargie** et s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée **u**(*y*) par un facteur d'élargissement ***k*** tel que

$$\boldsymbol{U = k \cdot \mathrm{u}}(y).$$

Facteur d’élargissement

- On a défini ***U***, appelé **incertitude élargie** qui s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée **u**(*y*) par un facteur d'élargissement ***k*** tel que

$$U = k \cdot \mathbf{u}(y)$$

- ***k*** dépend donc du niveau de confiance demandé.
  Il est généralement admis que pour un nombre de mesures $N \geq 30$ et un niveau de confiance de 95% on prend ***k*** = 2 .

- **Par contre** pour $N < 30$ la valeur de ***k*** doit être majorée pour prendre en compte le manque de fiabilité dû au faible nombre de mesures.

- Le facteur d’élargissement est calculé selon GUM en introduisant la notion de **degrés de liberté** ν par une procédure qui peut devenir assez complexe selon le type et le nombre de grandeurs d’entrée de la fonction $y = f\,(x_1, \ldots , x_n)$. On ne donne ici que les cas les plus simples et fréquents.

5) Calcul du nombre de degrés de liberté ν

Si l'incertitude type est dominée par les **erreurs aléatoires** on aura:

- dans le cas de la mesure directe d'une grandeur estimée par la moyenne arithmétique de N observations indépendantes, le nombre de degrés de liberté ν est égal à

$$\nu = N - 1$$

- Si les N observations sont utilisées pour déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b d'une droite par la méthode des moindres carrés (cas d'une droite d'étalonnage telle que $y = a\, x + b$,
le nombre de degrés de liberté associé respectivement aux incertitudes-types u(a) et u(b) est

$$\nu = N - 2$$

- Pour un ajustement par la méthode des moindres carrés de p paramètres pour N données, le nombre de degrés de liberté de l'incertitude-type de chaque paramètre est

$$\nu = N - p$$

Donc, si l’incertitude type est dominée par les **erreurs aléatoires** on aura des différents cas énumérés ci-dessus sont rassemblés dans le tableau ici-bas:

Situation de mesure	**degrés de liberté** v
N mesures répétées	$N - 1$
N mesures répétées pour droite d’étalonnage $y = a\,x + b$	$N - 2$
N mesures répétées pour ajustement à p paramètres	$N - p$

Si l'incertitude type est dominée par les **erreurs de tolérance**:

- Le nombre de degrés de liberté d'une erreur de tolerance est - en principe – infini, ce qui donne k = 2 pour (1 – α) = 95%.
- On peut donc prendre directement k = 2 pour (1 – α) = 95%.

Plus en général on peut calculer le **nombre de degrés de liberté effectif** avec la relation de Welch-Satterthwaite:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right]^4}{\nu_i}}$$

où ν_i est le nombre de degrés de liberté de la composante de l'incertitude $\mathbf{u(x_i)}$.

Evaluation du facteur d’élargissement ***k*** selon GUM

Nombre de degrés de liberté ***ν***	**Niveau de confiance (1−α) en %**					
	68,27	**90,00**	**95,00**	**95,45**	**99,00**	**99,73**
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,8
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,92
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	194	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,97
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,01	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,00	1,645	1,96	2	2,576	3,00

6) Expression finale du résultat de mesure

D'une façon générale, un résultat de mesure est constitué de 3 éléments:

- ☐ une valeur annoncée correspondant à la **valeur moyenne** du mesurande éventuellement corrigée si une erreur de justesse a été constatée,
- ☐ une **incertitude élargie** associée à un **intervalle de confiance**,
- ☐ une **unité de mesure** garantissant la traçabilité avec le Système International (S.I.) d'unités.

Le résultat de la mesure s’exprimera avec une incertitude qui sera associée au niveau de confiance demandé (souvent 95%), de la forme

$$\boldsymbol{y \pm U} \ \ \textbf{[unités]} \ \ \textbf{au niveau de confiance XX\%}$$

où ***y*** est la valeur (moyenne) annoncée et
U est l’incertitude élargie $\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{u}(y)$.

Arrondi de l'incertitude et du résultat final

- L'incertitude élargie est habituellement donnée avec une (au maximum deux) chiffre-s significatifs. Le dernier chiffre significatif du résultat doit être à la même position décimale que l'incertitude.

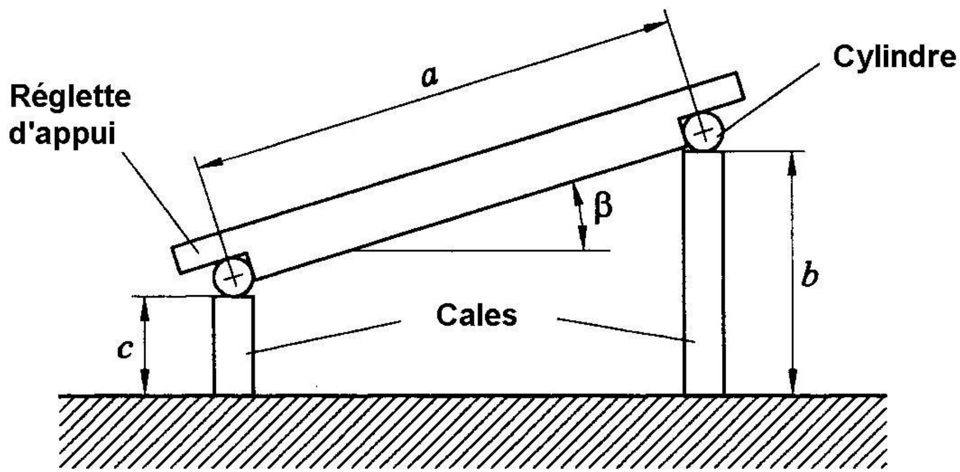
- L'arrondi des mesurandes et des incertitudes se fait en appliquant les règles usuelles d'arrondi: il n'y a pas de majoration des incertitudes. Il peut cependant être parfois approprié d'arrondir les incertitudes au chiffre supérieur plutôt qu'au chiffre le plus proche.

Travail personnel

- Etudier tout le chapitre 7
« Bilan et calcul d’incertitude »
du polycopié.

Problème

La règle ci-contre est constituée d'une réglette d'appui posée sur deux cales verticales par l'intermédiaire de deux cylindres de haute précision.
Les axes des cylindres sont à une distance *a*.
Les deux cales verticales ont une longueur de *b*, respectivement *c*.



Dimension nominale	a = 100 mm	b = 50 mm	c = 20 mm
Tolérance	Δa = 2.0 μm	Δb = 0.8 μm	Δc = 0.6 μm

Déterminer:

a) La tolérance sur l'angle β au niveau de confiance $(1 - \alpha) = 95\%$

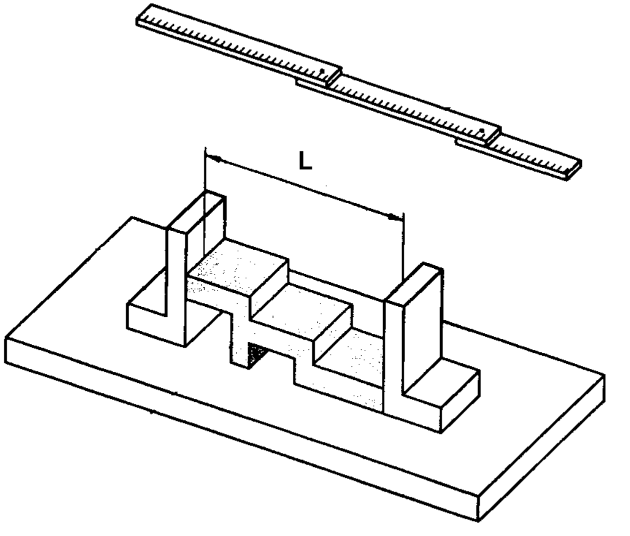
b) Donner l'indication complète de l'angle β au niveau de confiance $(1 - \alpha) = 95\%$

Problème

On mesure 10 fois consécutivement la longueur d'une pièce mécanique à l'aide d'un mètre pliant dont les graduations sont espacées de 1 mm.

On obtient les résultats suivants:

$$L_i = 499.5, 500, 501, 502, 501, 499.5, 501.5, 500, 501.5 \text{ et } 501 \text{ mm}$$



Déterminer:

- L'incertitude d'une mesure ainsi que l'incertitude de la valeur moyenne lors de la mesure de la longueur de l'objet avec le mètre pliant au niveau de confiance ($1-\alpha$) = 95%.

Problème

Un équipement électrique est assimilable à une simple résistance R de 200 Ohm qui est connue avec une tolérance de 0.5%.
Afin d'évaluer la puissance consommée on mesure le courant traversant l'équipement avec un ampèremètre de bonne précision (erreur de tolérance < 10 µA).

On constate que la mesure du courant, qui a été répétée 10 fois et à une valeur moyenne de 1 A, est affectée par une dispersion gaussienne avec un écart-type de 0.01 A.

Evaluer par la méthode GUM au niveau de confiance de 95% l'**incertitude** de la **mesure moyenne du courant**.

En admettant que la puissance dissipée est donnée par $\mathbf{W} = \mathbf{I}^2\,\mathbf{R}$, calculer par la méthode GUM la **valeur moyenne de la puissance** et **l'incertitude** au niveau de confiance de 95% ?

Problème

Un voltmètre numérique possède une gamme de mesure de 300 mV à 1000 V et un affichage avec un pas de 0.01 V.
Le fabricant de l'instrument donne pour cet instrument une tolérance de 0.05%.
(Dans cette tolérance sont comprises les influences suivantes: chutes de tension des résistances internes de l'instrument, erreurs de linéarité et d'offset (mise à zéro), chutes de tension dans les pinces et les câbles de mesure fournis par le constructeur.)

A l'aide de ce voltmètre, on mesure la tension d'alimentation d'un moteur électrique une dizaine de fois et l'on note:

U = 380.11, 379.99, 379.81,380.00, 380.19, 380.06,
379.99, 379.96, 380.02, 380.10 V

- Déterminer l'incertitude d'une mesure ainsi que de celle de la valeur moyenne de la tension d'alimentation du moteur à l'aide de ce multimètre au niveau de confiance (1-α) = 95%.

Le programme GUMic

Que fait *GUMic* ?

GUMic est un programme qui permet d'exprimer le résultat de mesure avec un intervalle d'incertitude assorti d'un niveau de confiance.

GUMic calcule l'incertitude de mesure selon deux méthodes :

- *La méthode GUM (Guide to the expression of Uncertainly in Measurement) qui est une norme ISO.*
- *La méthode Monte-Carlo qui est une méthode numérique de tirages au sort très puissante.*

Les limites de *GUMic*

GUMic utilise la méthode GUM limitée à l'ordre 1 (ceci n'est pas vraiment un handicap car le cas des processus fortement non linéaires est très bien traité par la méthode Monte-Carlo).

GUMic ne prend pas en charge le cas des variables aléatoires corrélées.

Comment procéder ?

- Remplir les cases jaunes de la feuille de calcul.
- Les cases jaunes qui correspondent à un intitulé de police rouge sont indispensables au calcul.
- Cliquer sur « *Calculer* » et attendre quelques secondes le résultat.
- Pour ajouter une grandeur au tableau cliquer sur « Ajouter Supprimer Ligne » (20 lignes au maximum).

Pratique

- Une aide directe est disponible en plaçant la souris sur l'intitulé de la colonne ou de la ligne.
- Un zoom manuel est possible : **Ctrl + molette** (de la souris)

Exemple de calcul réalisé par *GUMic* page suivante

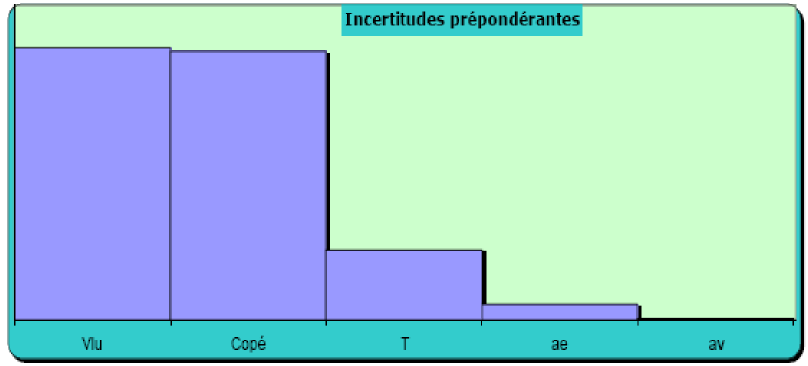
Exemple GUMic

TITRE	**Volume d'eau prélevé par pipetage**

Résultat final	**Ve(20°C) = 9,989 ± 0,021 cm3** **avec k = 2,11** **Niveau de confiance : 95 % Exactitude : 0,21 %**

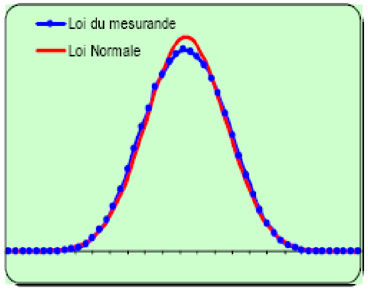
1) Définition du mesurande Y

Description	On travaille à 26°C, or le volume qui relie le processus de mesure aux étalons internationnaux est le volume de la pipette à 20°C dont la classe nous est garantie par le fabricant. Donc le volume d'eau que l'on cherche est le volume d'eau prélevé à la pipette ramené à 20°C et il faut donc tenir compte a priori des dilatations thermiques du verre de la pipette et de l'eau que celle-ci contient.
Symbole	**Ve(20°C)**
Unité	cm3



MESURANDE	*Méthode GUM*	*Méthode MonteCarlo*
Moyenne	9989,21 E-3	9989,21 E-3
Ecart type	9,90 E-3	9,91 E-3
Degrés de liberté	17	

Les résultats sont identiques pour les deux méthodes donc le mesurande est quasi linéaire sur son intervalle d'incertitude.
Nombre de degrés de liberté < 30 donc le facteur d'élargissement k suit loi de Student



2) Modèle mathématique $Y(X_1, \dots, X_n)$ du processus de mesure

Ve(20°C) =	(Vlu+Copé)*[1+av*(T-20)]/(1+ae*(T-20)]

3) Tableau des grandeurs X_i du modèle

Nom grandeur	Symbole grandeur X_i	Unité	Source incertitude	Loi de probabilité	Moyenne	Demi-étendue U ou a ou écart-type σ ou s(X)	Fiabilité Δu/u en % ou taille n échantillon	Incertitude type unité grandeur $u(x_i)$	Coefficient de Sensibilité $\frac{\partial Y}{\partial x_i}$	Incertitude type unité mesurande $\frac{\partial Y}{\partial x_i} \cdot u(x_i)$	Nombre de degrés de liberté ν_i
Volume lu	**Vlu**	cm3	Vérification(classe)	Loi uniforme	10	a = 0,012		6,93 E-3 cm3	1,00 (cm3) / (cm3)	6,92 E-3 cm3	infini
Habileté opérateur	**Copé**	cm3	Echantillonnage	Répétabilité pour s	0	s = 0,00685	n = 5	6,85 E-3 cm3	1,00 (cm3) / (cm3)	6,84 E-3 cm3	4
Coef dilatation verre	**av**	°C-1	Estimation perso	Loi normale 3s	3,0E-5	U = 0,2E-5	Δu/u = 50	6,67 E-7 °C-1	59,9 (cm3) / (°C-1)	0,04 E-3 cm3	2
Coef dilatation eau	**ae**	°C-1	Estimation perso	Loi normale 3s	2,1E-4	U = 0,2E-4	Δu/u = 50	6,67 E-6 °C-1	59,9 (cm3) / (°C-1)	0,40 E-3 cm3	2
Temp ambiante	**T**	°C	Estimation perso	Loi normale 3s	26	U = 3	Δu/u = 50	1,00 °C	1,80 E-3 (cm3) / (°C)	1,80 E-3 cm3	2