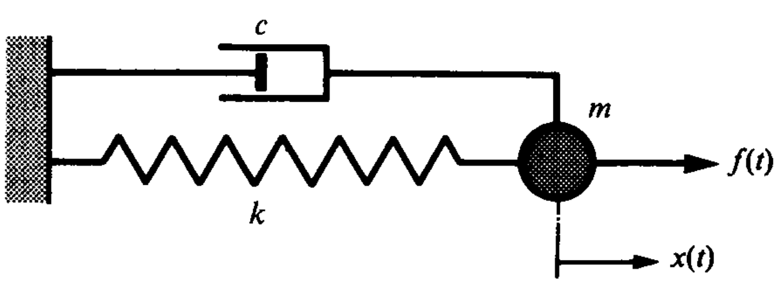
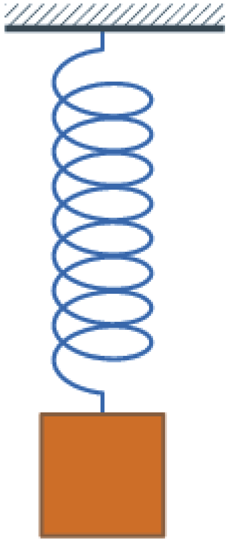
Comportement d'un système à 1 ddl (*dof*)

Système à 1 degré de liberté (*degree of freedom – DoF*)

- Régis par une équation du second ordre

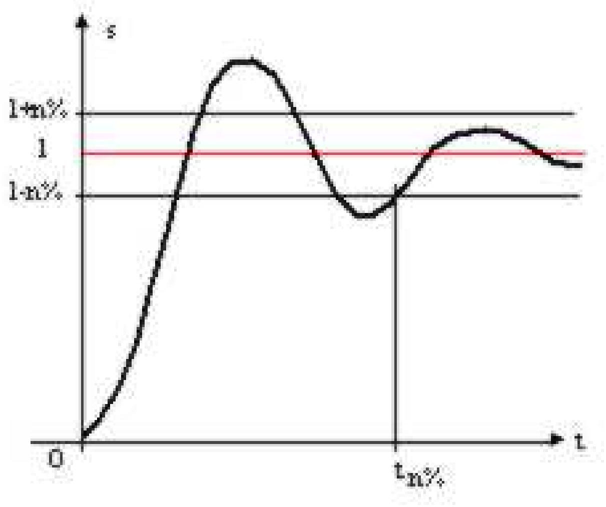
$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$

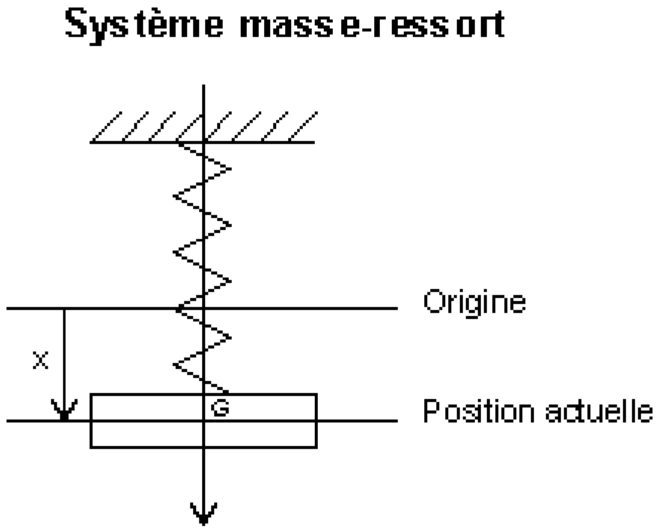




Rappels sur la dynamique des systèmes

- Pour remonter de la sollicitation F(t) à la valeur d'une variable caractéristique x(t), il faut obtenir une relation qui n'est autre que la réponse dynamique du système F(t)/x(t), tout comme la réponse statique était F_0/x_0.





Rappels sur la dynamique des systèmes

- Deux facteurs principaux sont à considérer, qui agissent conjointement:
  - **les inerties**
  - **les phénomènes de dissipation**

1. **Inerties**: ce sont les inerties qui font que le système tend à rester dans sa configuration actuelle et a besoin d'un apport d'énergie pour modifier son état; il s'oppose en quelque sorte au changement. Les inerties se présentent comme des réservoirs d'énergie ou de matière, qu'il faut remplir, ce qui ne peut être instantané, car le débit est limité. Suivant la nature des instruments et des grandeurs mesurées, ce peuvent être:
   - les inerties **mécaniques**: la masse d'un élément, soumise à une accélération ne prend son mouvement que progressivement;
   - les inerties **électriques**: le courant ne s'établit pas instantanément dans un circuit comportant soit une self-inductance dans laquelle il faut créer un champ, soit une capacité qu'il faut charger;
   - les inerties **caloriques**: la température du réservoir d'un thermomètre ne s'élève qu'au fur et à mesure de l'apport des calories;
   - les inerties **pneumatiques**: un réservoir, la capsule d'un manomètre par exemple, ne s'emplit que progressivement;
   - les inerties **chimiques**: une réaction procède suivant une cinétique qui retarde son établissement.

2. **Phénomènes de dissipation**:
   ce sont les frottements qui dissipent l'énergie, véhicule de la mesure, et amortissent l'instrument.

- Ce sont eux qui limitent le débit d'énergie ou de matière et ralentissent l'emplissage du réservoir constitué par les inerties.
- Ici encore, leur nature dépend des dispositifs expérimentaux. Ce peuvent être:
  - le frottement sec entre deux surfaces;
  - le frottement visqueux, laminaire ou turbulent, de gaz ou de liquide;
  - le frottement interne des solides, qui dissipe l'énergie liée à la déformation et joue un rôle important dans l'amortissement des vibrations;
  - la résistance électrique, qui dissipe en chaleur l'énergie électrique. Son action se manifeste fréquemment par l'intermédiaire des courants induits ou courants de Foucault;
  - le rayonnement radioélectrique, calorifique, acoustique, qui disperse dans le milieu environnant l'énergie de la mesure;
  - la conduction thermique, qui laisse fuir les calories ou au contraire freine les échanges calorifiques.

Réponse dynamique d'un système

- Lorsqu'un instrument de mesure fournit une grandeur de sortie qui varie suivant la loi S(t), il est possible de calculer la variation simultanée de la grandeur d'entrée E(t) si l'on connaît la réponse dynamique de l'instrument pour certaines lois particulières de variation de la grandeur d'entrée.
- La discussion qui suit s'applique au cas où le comportement dynamique d'un système peut être caractérisée par une équation différentielle linéaire, ce qui est très souvent le cas mais pas une généralité.
- Une telle équation se présente sous la forme:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots\dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

- La variable x(t) correspond à la sollicitation, la variable y(t) à la caractéristique mesurable du système.
- Les coefficients $a_n, \dots a_0$ sont des constantes.
- Le membre de gauche représente l'équation caractéristique de l'équation différentielle.
  Il contient des informations caractérisant la physique du système et la manière dont il répond quand il est excité.
- Le membre de droite représente le signal d'entrée, la sollicitation ou l'excitation.

- Ainsi les deux membres contiennent des informations indépendantes, d'un côté la caractéristique de transfert du système, de l'autre la fonction d'excitation appliquée.
- Les performances du système peuvent donc être obtenues théoriquement si l'équation différentielle linéaire non-homogène peut être résolue en fournissant la valeur de la sortie en fonction du temps.
- Comme les deux fonctions sont des expressions linéaires, elles peuvent toutes deux être converties en fonctions de transfert par la méthode de Laplace.
- Les systèmes d'ordre 0, 1 et 2 seront pris en considération dans la discussion qui suit.
- Les fonctions de transfert unitaires typiques de ces systèmes sont alors, avec $s = j\omega$ et les paramètres τ qui sont des constantes de temps:

Ordre 0: $a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = 1$$

Ordre 1: $a_1 \dot{y} + a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$$

Ordre 2: $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)}$$

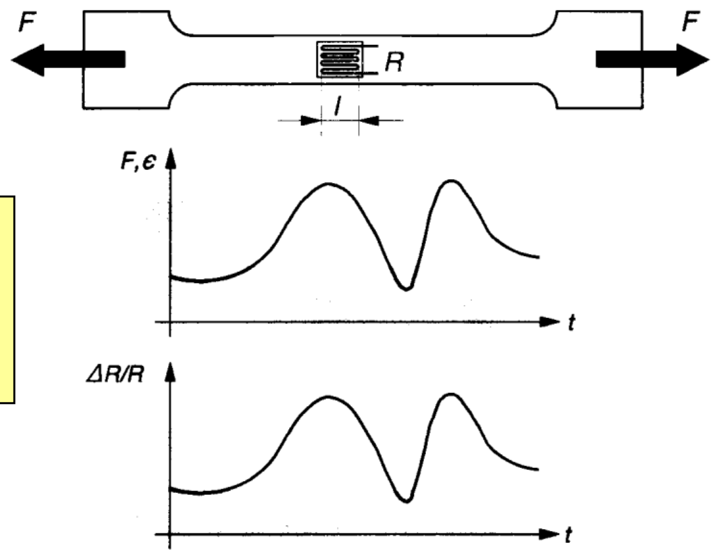
Systèmes d'ordre zéro – temps de réponse = 0

- Le système d'ordre zéro ne peut pas introduire de déphasage ou de modification d'amplitude en fonction de la fréquence du signal appliqué.
- L'équation à la forme:

$$a_0 y = u(t)$$

- La forme d'équation montre qu'il n'y a pas de dérivées, signifiant que le système ne va pas altérer les caractéristiques temporelles d'une fonction dépendante du temps introduite en entrée.

Par exemple, une jauge de contrainte résistive, dans laquelle l'allongement provoque une modification proportionnelle de la résistance électrique, sans temps de retard appréciable, représente un système d'ordre zéro.



Systèmes du premier ordre

- Un instrument du premier ordre est régis par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants:

$$\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

- La variable $x(t)$ correspond au mesurande, la variable $y(t)$ correspond à la mesure. Il faut noter que $y(t)$ et $x(t)$ sont des grandeurs de même dimension.

- La fonction de transfert en s est:

$$TF = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

où λ est une constante de temps.

Systèmes du deuxième ordre

- Un système du premier ordre est régis par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

- Il faut noter que $y(t)$ et $u(t)$ sont des grandeurs de même dimension.

L’équation générale des systèmes de deuxième ordre

L'étude de l'équation générale

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (1)$$

conduit à définir quelques termes qui reviennent constamment dans les calculs.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

est appelé ***pulsation propre*** du système et $\omega_0/2\pi$ sa ***fréquence propre***.

De même s'introduit l'expression: $\zeta = \frac{a_1}{2 \cdot \omega_0 \cdot a_2} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$

qui caractérise l'amortissement du système.
ζ est appelé ***coefficient d'amortissement***.

Avec ces notations et en divisant l’équation (1) par a_0, l'équation prend la forme canonique:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Réponse indicielle (*step response*)

- L'équation différentielle devient:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_0}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=E_0\cdot U(t)$$

où E_0 est l'amplitude de l'échelon défini par la fonction de «saut» *U*(t).

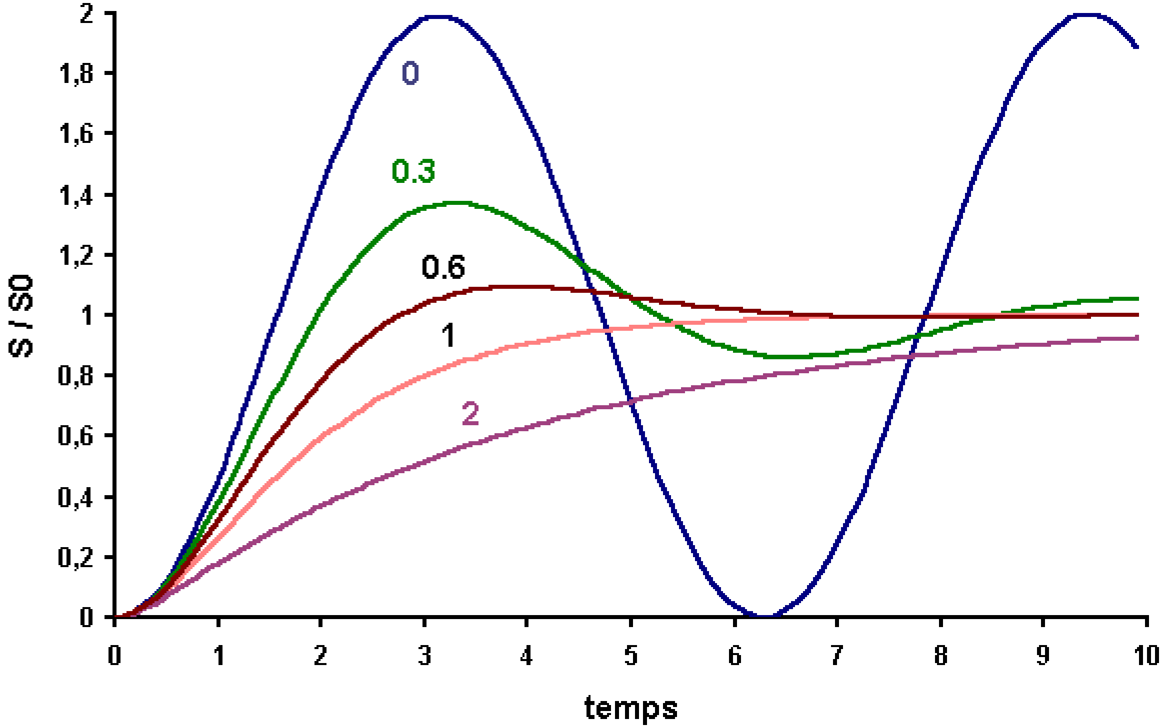
- La solution de cette équation dépend du signe et de la valeur du discriminant:

$$\sqrt{\zeta^2-1}$$

ce qui détermine trois type de solutions

1. **ζ < 1 : régime périodique**
2. **ζ = 1 : régime critique**
3. **ζ > 1 : régime apériodique**

Réponse é un échelon en fonction de ζ , coefficient d'amortissement

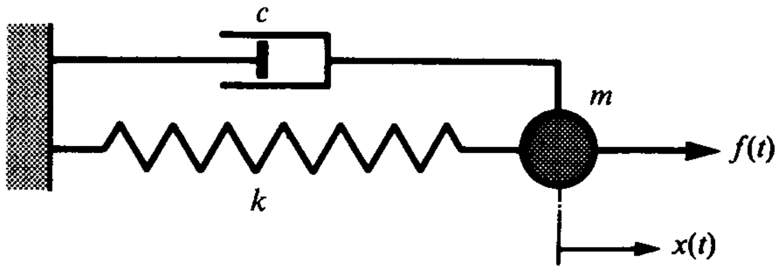


- $\zeta < 1$: régime périodique
- $\zeta = 1$: régime critique
- $\zeta > 1$: régime apériodique

Système mécanique à 1 degré de liberté

- Régis par une équation du second ordre

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$



- qui peut être donc représentée sous une forme canonique par

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{f(t)}{m}$$

avec:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre (rad/s)

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$ l'amortissement relatif (-)

Fonction de transfert

$$TF = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1}$$

Avec:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre (rad/s)

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$ l'amortissement relatif (-)

Diagramme de Bode

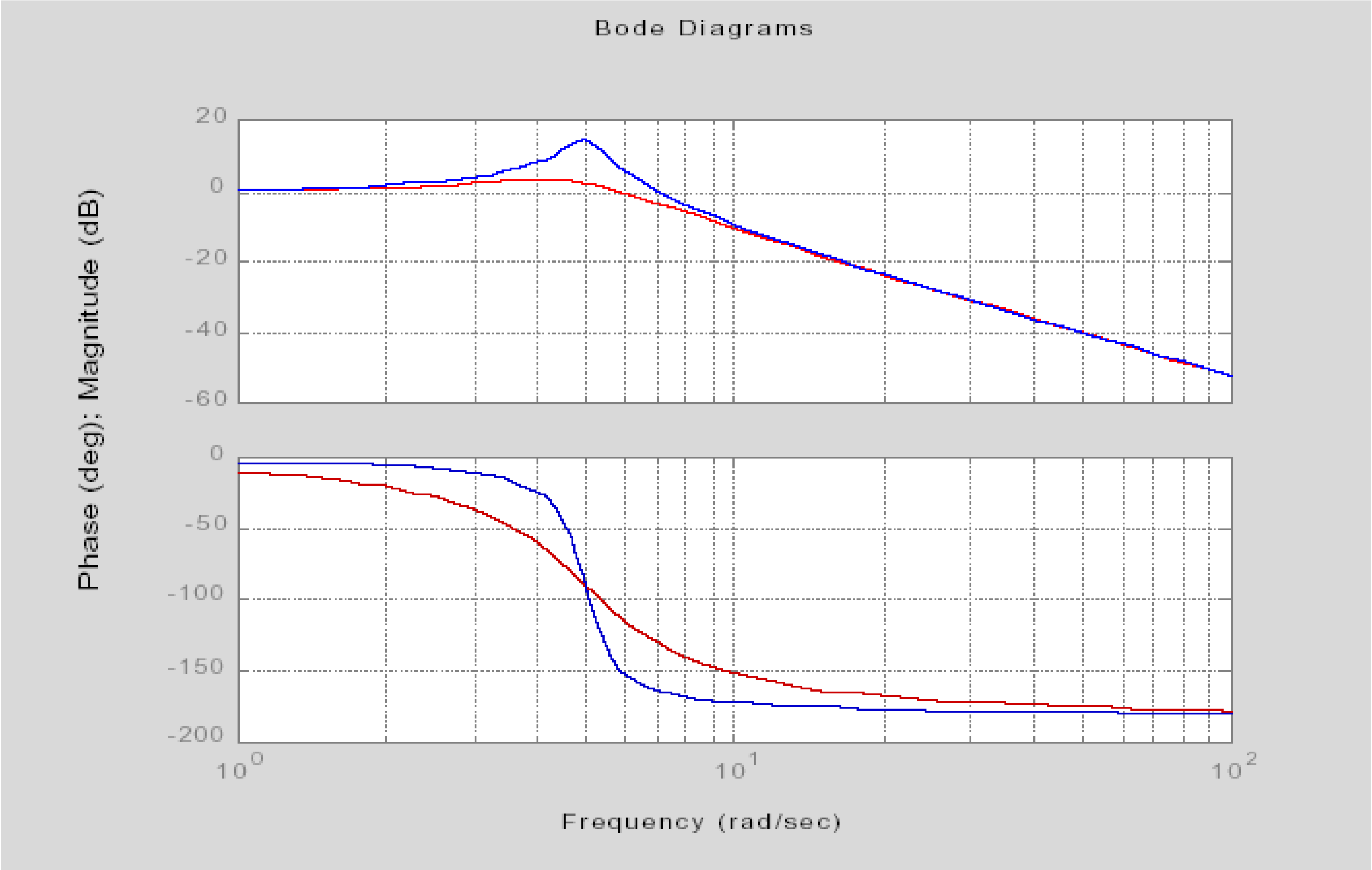
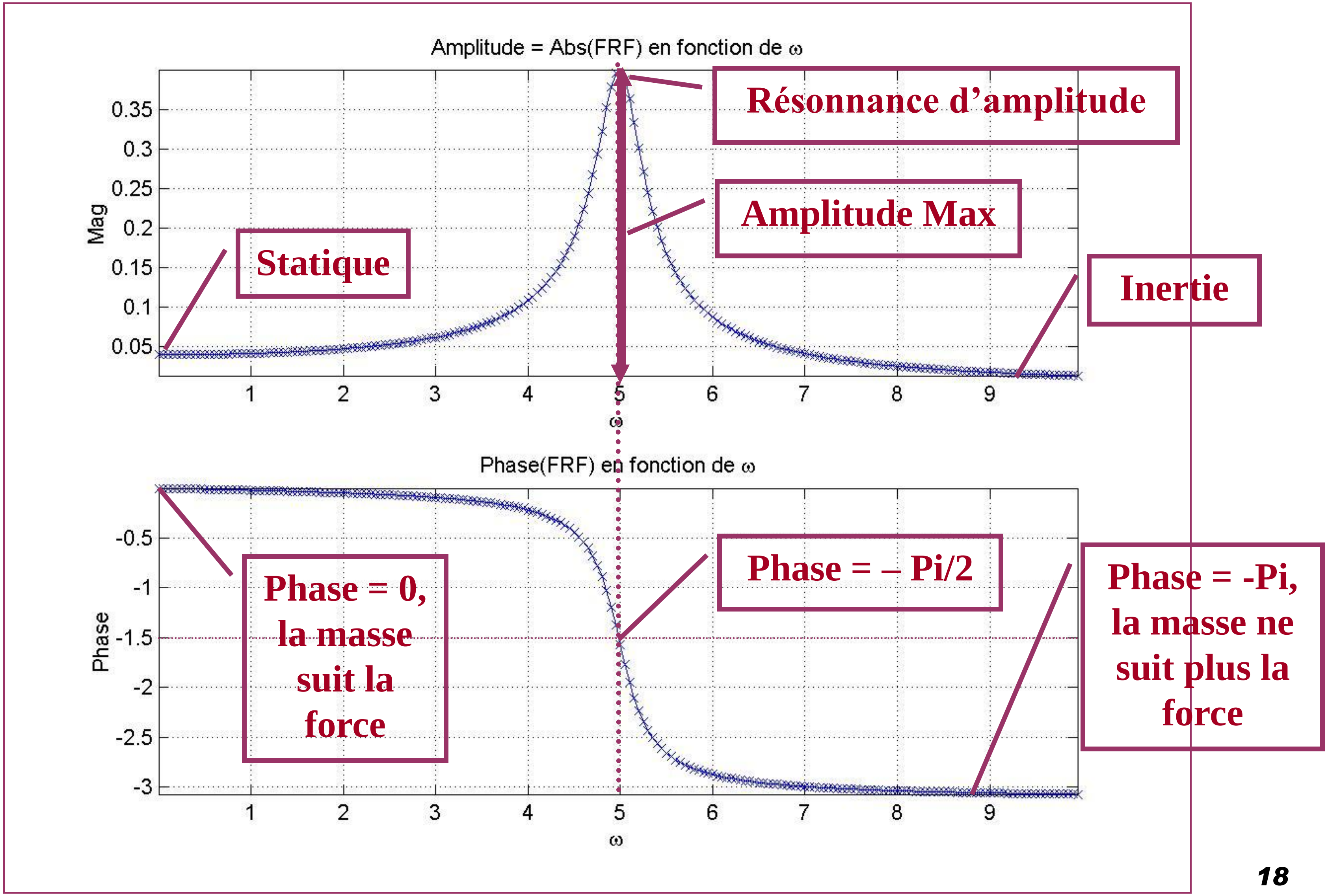


diagramme de Bode pour deux coefficients d'amortissement z= 0.1(bleu) et 0.4(rouge)


Amplitude = Abs(FRF) en fonction de ω
Mag
ω
Phase(FRF) en fonction de ω
Phase
ω
Résonnance d'amplitude
Amplitude Max
Statique
Inertie
Phase = 0, la masse suit la force
Phase = – Pi/2
Phase = -Pi, la masse ne suit plus la force

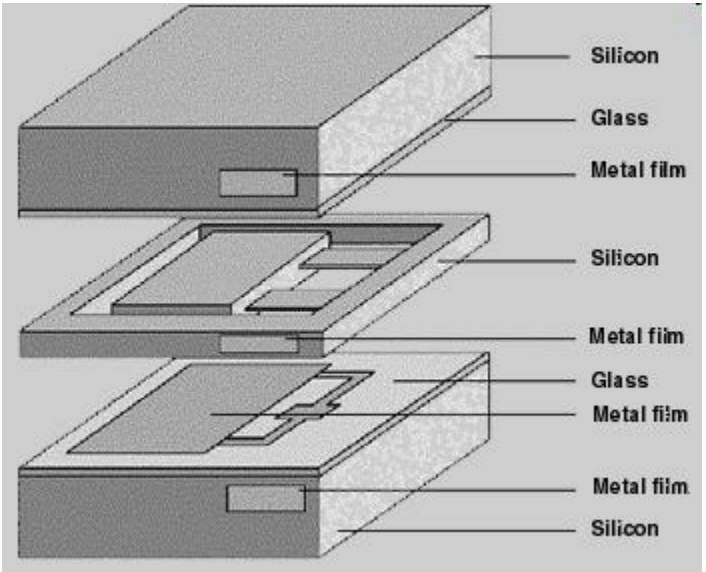
Exercice

- Le micro-accéléromètre de la figure ci-contre constitué d'une masse attachée sur une poutre. Il est légèrement amorti et est utilisable dans une gamme de fréquence au-dessous de sa fréquence de résonance.
- On suppose sa pulsation propre $\omega_0 = 10^4$ rad/s, et $\zeta = 0.01$.

1. Ecrire son équation du deuxième ordre et la fonction de transfert en s:

$$TF = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}$$

2. Tracer avec Matlab le diagramme de Bode et la réponse indicielle.
3. Evaluer la fréquence d'utilisation maximale pour que la réponse ne dépasse pas une erreur de 5% sur l'amplitude.
4. Vérifier le résultat en traçant la réponse sinusoïdale à cette fréquence.



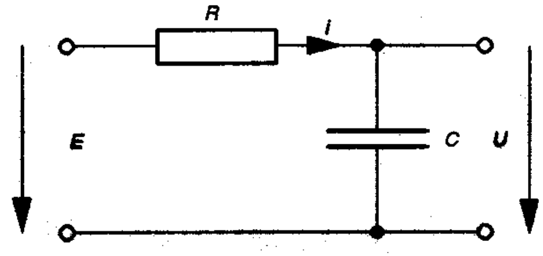
Accéléromètre à poutre plus filtre RC

- En pratique, souvent un capteur de deuxième ordre est associé à un filtre (dont le type RC est le plus simple).

- Exemple:
  - micro-accéléromètre avec fréquence de résonance de 1 kHz et amortissement ~1%
  - filtre RC avec R=100 kΩ et C=4.55 nF

1. Ecrire l'équation du système et la fonction de transfert en s pour
   - l'accéléromètre seul
   - l'accéléromètre plus filtre RC
2. Tracer avec Matlab le diagramme de Bode et la réponse indicielle pour l'accéléromètre seul, ensuite avec le filtre RC.
3. Evaluer la bande passante à -3 dB du système filtré.
4. Vérifier le résultat en traçant la réponse sinusoïdale à cette fréquence.

Rappel: circuit RC



La tension E est mesurée par un appareil comportant une résistance R et une capacité C montées en série.
L'application de la tension E provoque l'apparition d'un courant *i* qui va charger le condensateur C selon la loi:

$$q = \int i \cdot dt = C \cdot U$$

La valeur du courant i est obtenue en dérivant la charge par rapport au temps:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

Sachant que: $R \cdot i + U = E$ on obtient finalement:

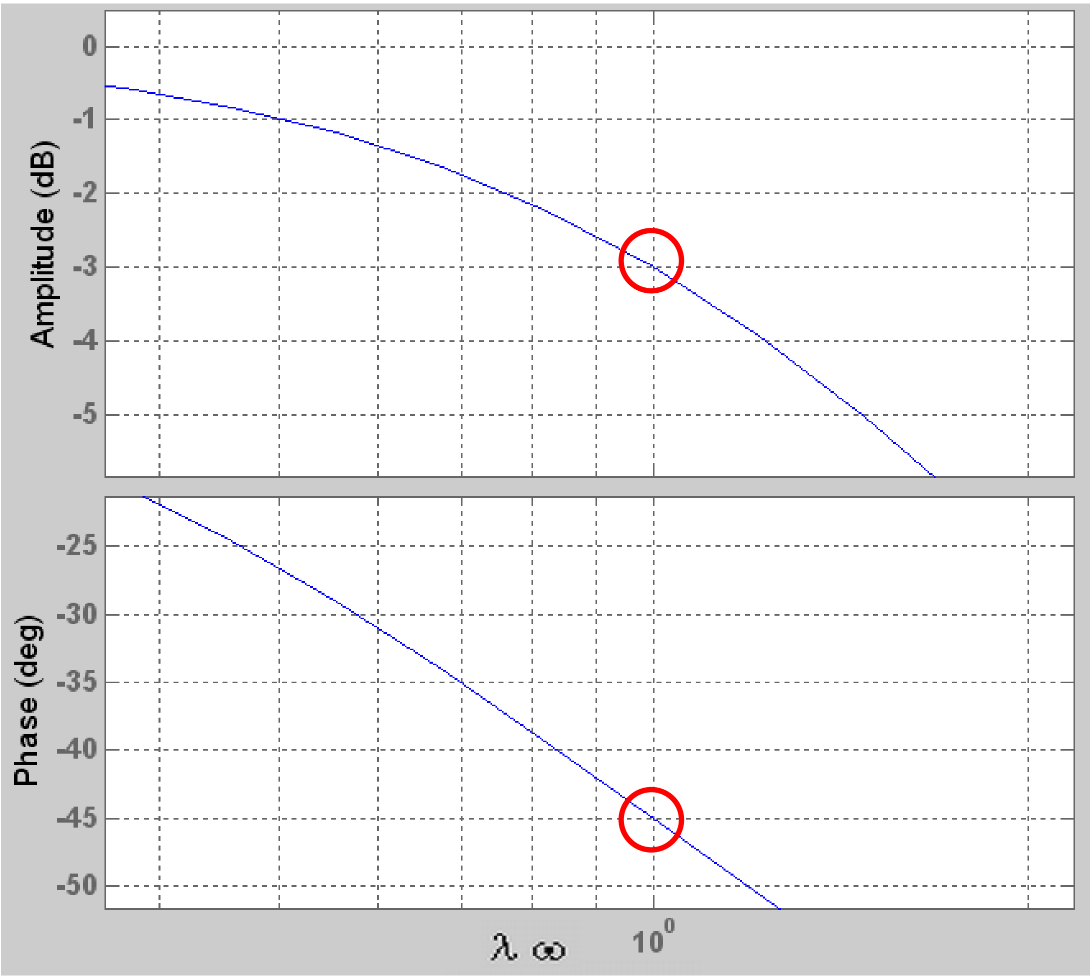
$$RC\frac{dU}{dt} + U = E$$

La fonction de transfert en *s* est donc:

$$\boxed{TF = \frac{1}{RC\,s + 1}}$$

Rappel: bande passante pour -3 dB

La bande passante d'un système ou instrument ou capteur est définie conventionnellement comme la <u>fréquence à laquelle le système à un gain de -**3 dB**</u> (~ 0.7 en amplitude relative – attention: ce sont des dB_{20} !)



La bande passante (-3dB) d'un système <u>du premier ordre</u> correspond à la fréquence:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} \qquad (rad/s)$$

$$f = \frac{1}{2\pi\lambda} \qquad (Hz)$$

et à la phase de -45 deg

Fréquences propres et fréquences propres apparentes avec amortissement

- Fréquence propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

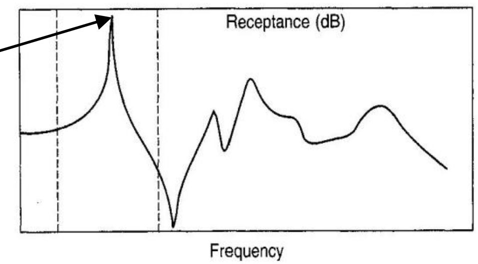
- Fréquence propre apparente : $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

Identification d’un système à 1 ddl

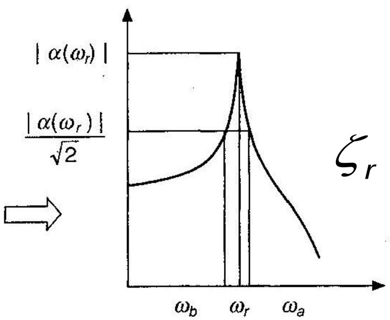
- *Peak Picking*

  - Fréquence:
    identifie la fréquence propre à la fréquence de résonnance

$$\omega_r = \omega_{pic}$$



  - Amortissement:
    utilise la largeur du pic à -3db ⇒



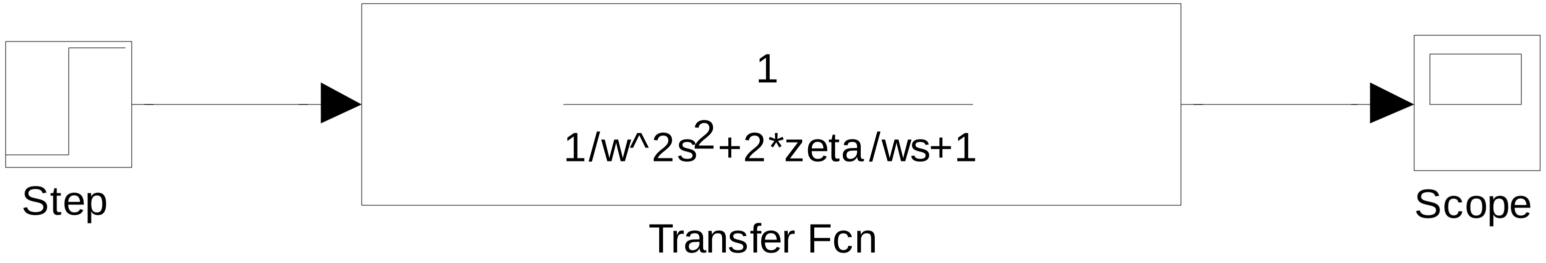
$$\zeta_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{4\omega_r^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r}$$

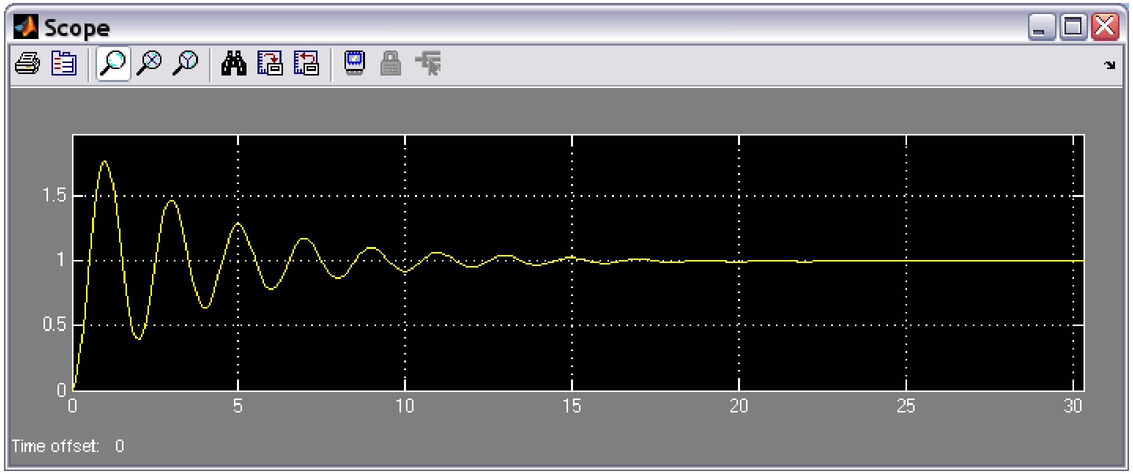
  - Rigidité:
    utilise la valeur de la fonction à la résonnance

$$\frac{1}{k} \approx 2\zeta\alpha(\omega_r) = 2\zeta\frac{Y(\omega_r)}{\omega_r}$$

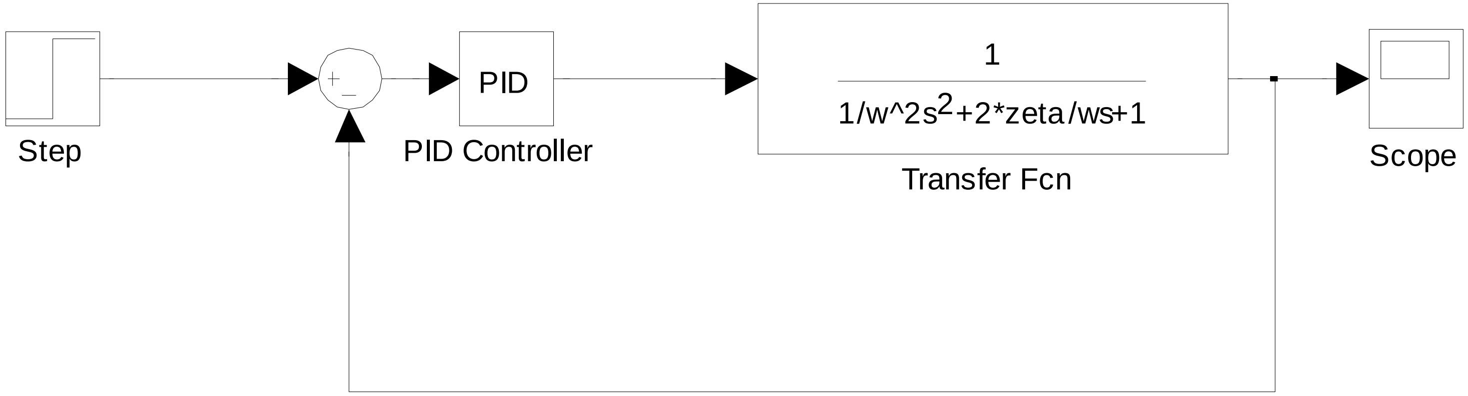
Simulation par Matlab/Simulink

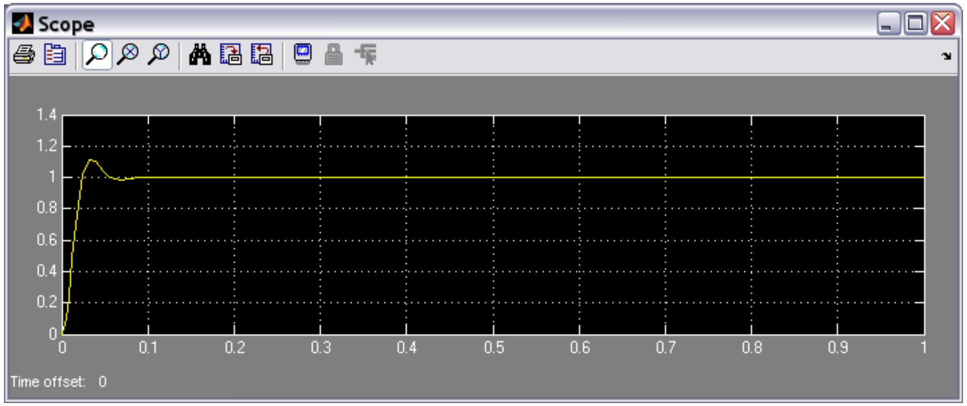
```
m = 0.1
c = 0.05
k = 1

w = sqrt(k/m)
zeta = c / (2*m*w)
```

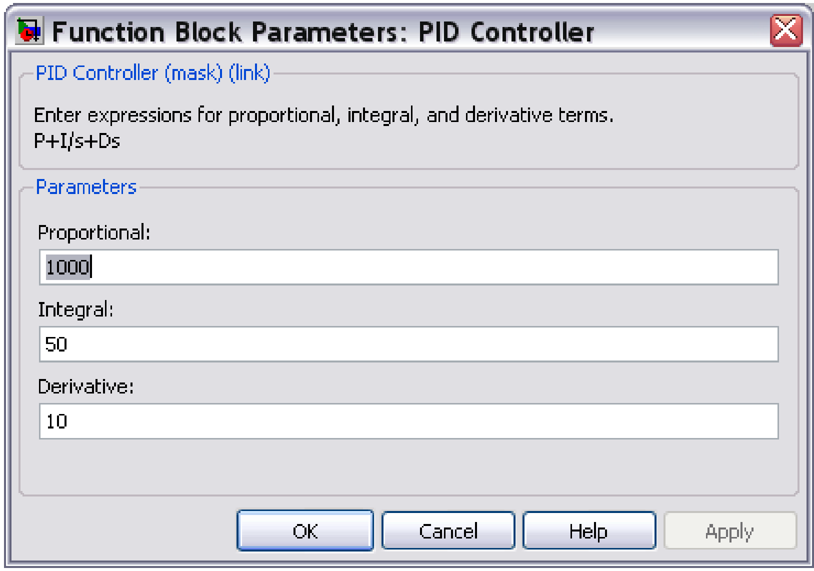




Régulation par un actionneur



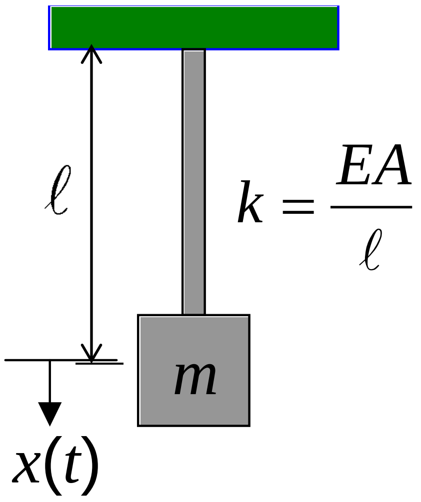


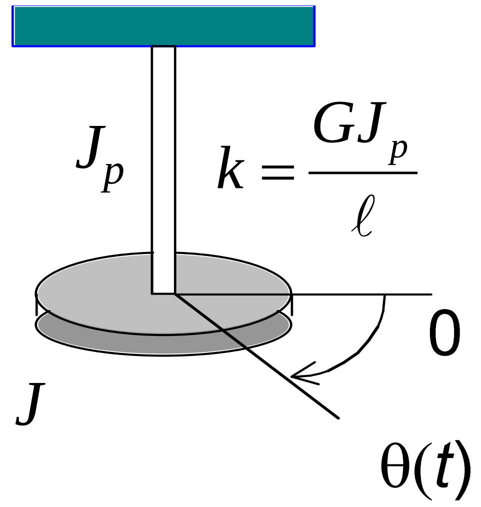


Annex

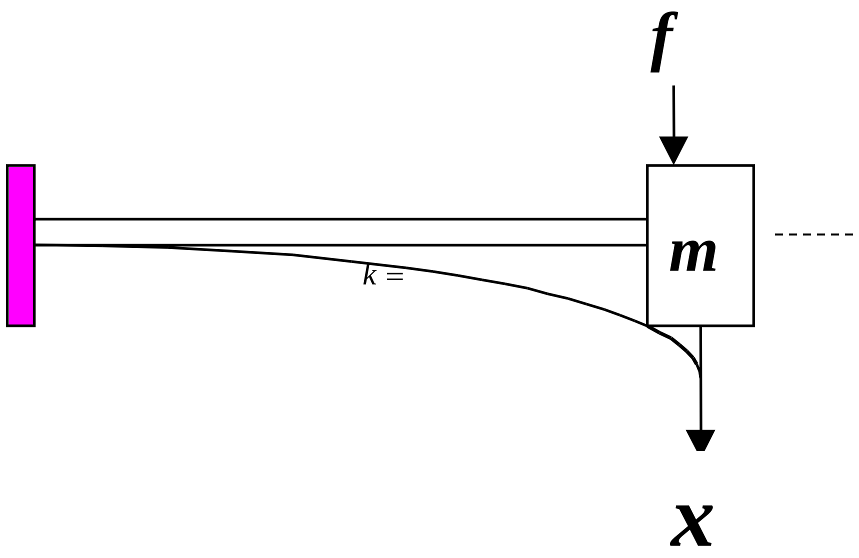
- Rappel de quelques formules utiles

Elasticité k pour des cas simples





Poutre transverse

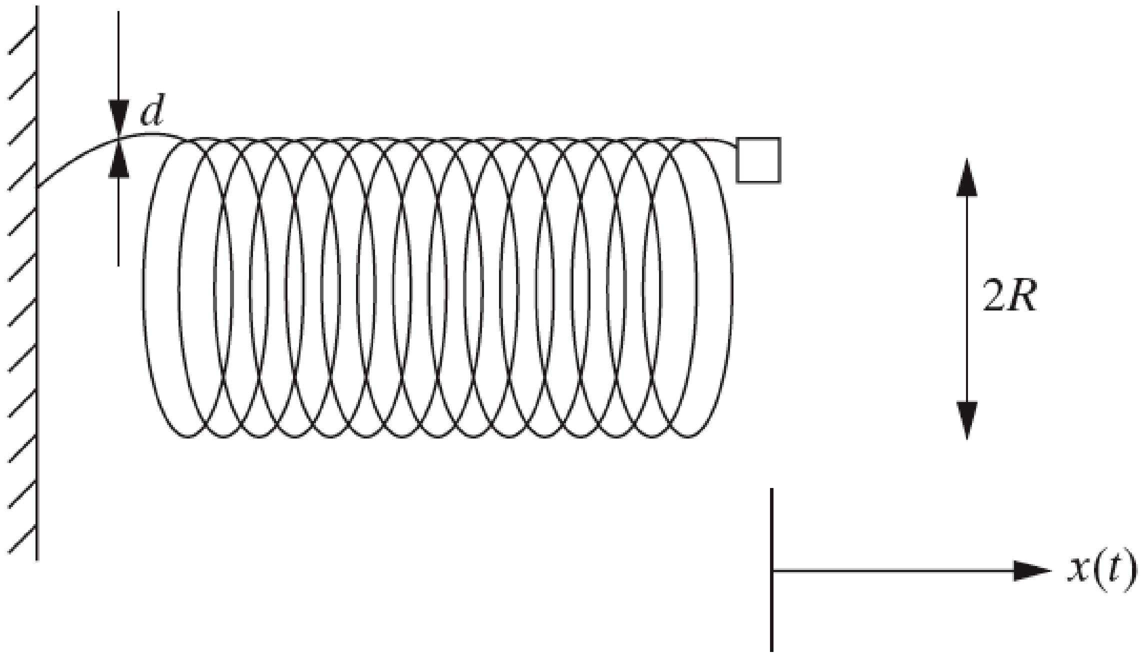


$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$

avec une masse m au bout:

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}}$$

Ressort hélicoïdal



d = diameter of spring material
$2R$ = diameter of turns
n = number of turns
$x(t)$ = deflection

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$$

G = shear modulus of spring material