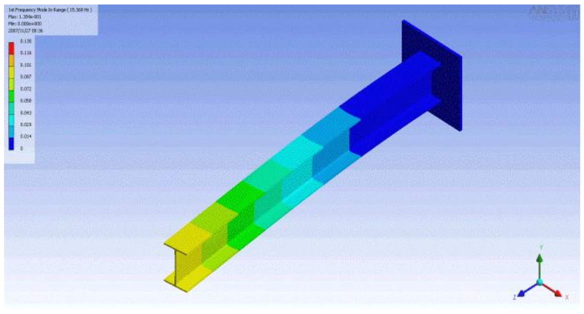
Analyse modale de systèmes à plusieurs ddl

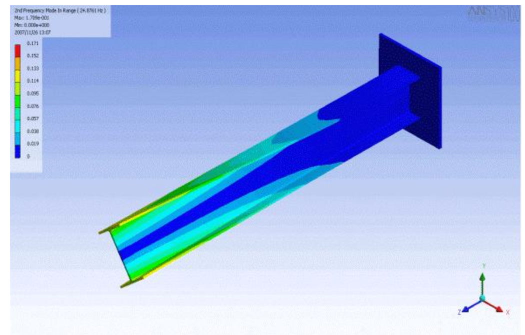
- Domaines d'application
- Calcul des modes propres et fréquences propres
- Application
- Décomposition modale

Systèmes à ddl multiples (*MDoF*)

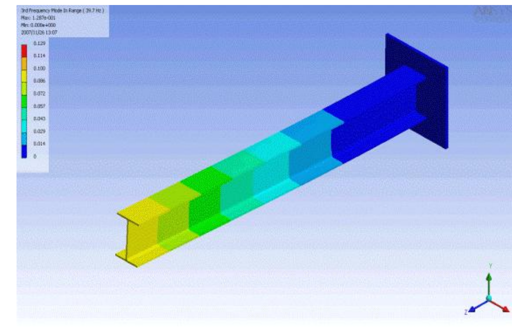
Modes d'une poutre encastrée



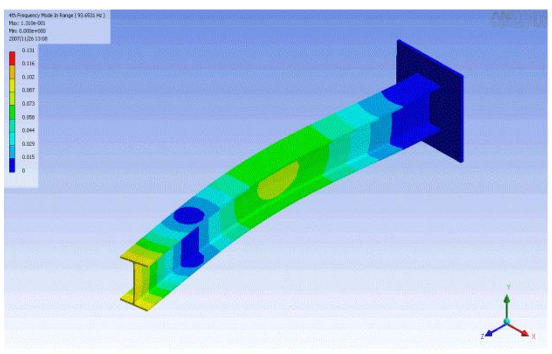
1st lateral bending



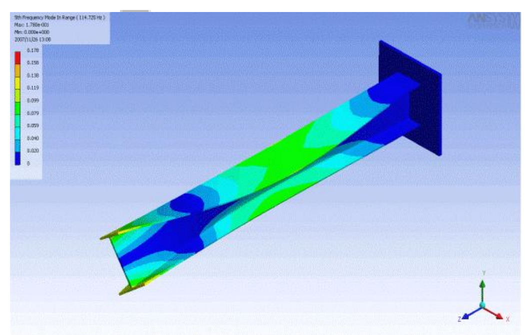
1st torsional



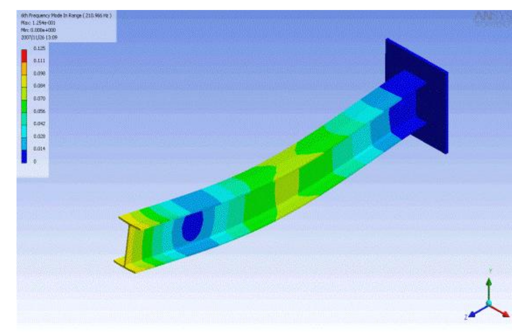
1st vertical bending



2nd lateral bending



2nd torsional

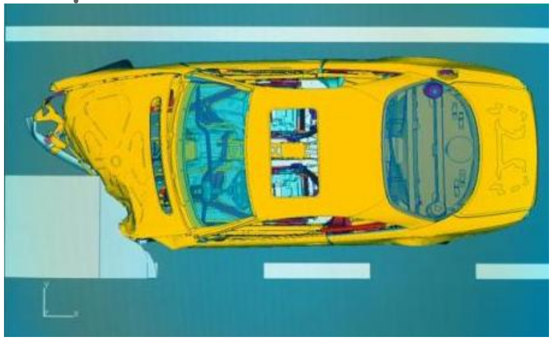


2nd vertical bending

Deux approches possibles de la dynamique …

- Approche modale : domaine fréquentiel
  - Recherche des fréquences propres et modes de déformés associés
  - Acoustique

- Approche instationnaire « pas-à-pas » : domaine temporel
  - Crash-tests
  - Dynamiques rapides (choc …)
  - Analyse de transitoire (démarrage moteur …)
  - Propagations d’ondes (airbag …)



www.netcar.co.il

Analyse modale

<u>Objectifs</u> : déterminer les fréquences propres de vibration ainsi que les modes de déformées propres associés

<u>Méthode</u> : calcul des valeurs et des vecteurs propres associés

« <u>Ingrédients</u> » : matrices de masse [M] et de rigidité [K]

Problèmes de dynamiques

La forme générale d'un système d'équations au 2ème ordre dans le domaine du temps s'écrit :

$$[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{U\}+[C]\frac{\partial}{\partial t}\{U\}+[K]\{U\}=\{F\}$$

Avec :

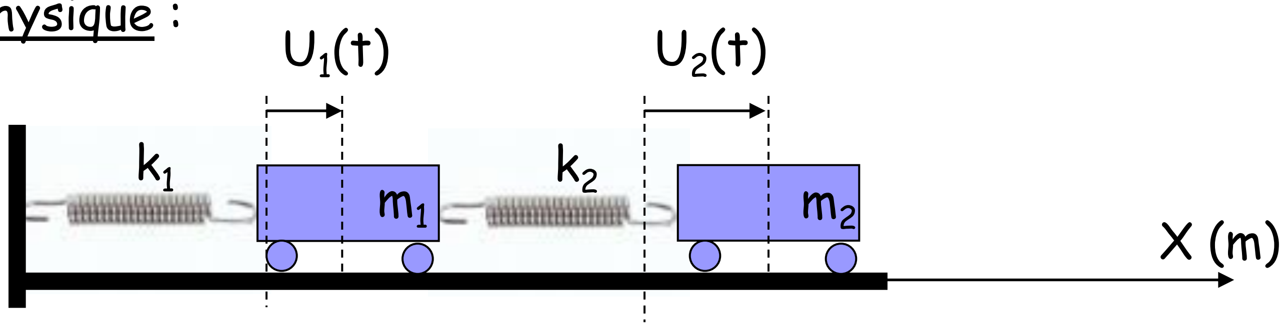
- $[M]$: matrice globale de masse
- $[C]$: matrice globale d'amortissement
- $[K]$: matrice globale de rigidité
- $\{F\}$: vecteur global des sollicitations

<u>Particularités de l'analyse modale</u> :

1. On considère toujours $\{F\}$ = $\{0\}$!
2. Analyse modale: conditions initiales inutiles !

Application 1 (discrète) : 2 masses et 2 ressorts

Modèle physique :



Equations du mouvement :

$$m_1 \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = -k_1 \times U_1(t) + k_2\left(U_2(t) - U_1(t)\right)$$

$$m_2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = -k_2\left(U_2(t) - U_1(t)\right)$$

Modèle discret :

$$\boxed{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Ecriture d'un problème aux valeurs propres

Forme générale « temporelle » :

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{0\}$$

On pose une solution de la forme :

$$\{U(t)\}=\{\bar{U}\}\times e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \{\ddot{U}(t)\}=-\omega^2\{\bar{U}\}\times e^{i\omega t}=-\omega^2\{U(t)\}$$

Ce qui conduit à :

$$-\omega^2[M]\{\bar{U}\}+[K]\{\bar{U}\}=\{0\} \longleftarrow \text{Ecriture « spectrale »}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{([K]-\omega^2[M])\{\bar{U}\}=\{0\}}$$

Ecriture générale d'un problème aux valeurs propres !
(au sens mécanique du terme)

Avec :

$\omega^2=\lambda=$ valeur propre, $\{\bar{U}\}=$ vecteur propre associé

Calcul des valeurs propres

Le calcul des valeurs propres s'obtient par la recherche des solutions non triviales de :

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\left\{\bar{U}\right\}=\{0\}$$

soit à vérifier :

$$\boxed{\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0}$$

Sur le plan pratique (Matlab) :

Matrice de rigidité

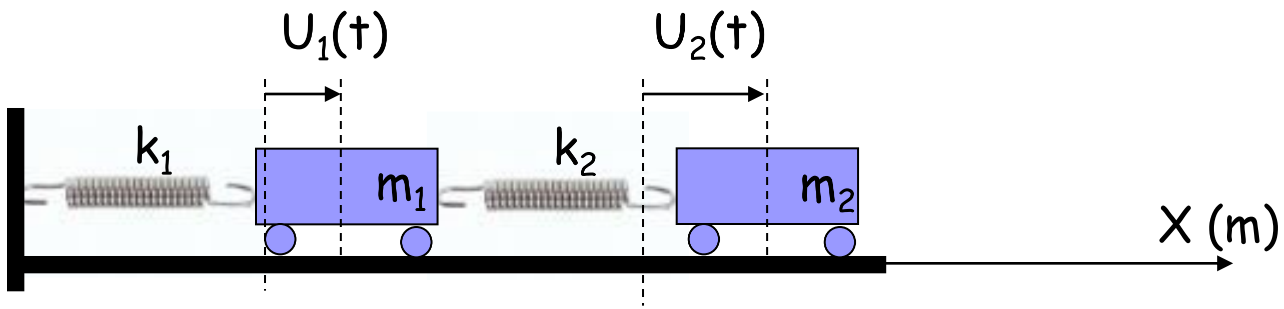
Matrice de masse

```
>> [V, D] = eig(vkg, vmg)
```

Matrice diagonale des valeurs propres

Matrice des modes propres

Application 1 : 2 masses et 2 ressorts Faisons un modèle en Matlab



- Paramètres: m_1, m_2, k_1, k_2
- Calculer:
  - Matrices de rigidité [K] et masse [M]
  - Fréquences propres
  - Modes propres

Exemple de calcul

Simplifications : $m_1=m_2=m=1$ kg, $k_1=k_2=k=1$ N/m

Soient : $$[M]=m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ [K]=k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Equation caractéristique : $$\det\left([K]-\lambda[M]\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}2k-\lambda m & -k\\ -k & k-\lambda m\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 m^2-3k\lambda m+k^2=0}$$

Calcul des racines : $$\lambda_1=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m}\approx 0.38\frac{k}{m},\quad \lambda_2=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m}\approx 2.62\frac{k}{m}$$

Calcul des modes propres :
(on normalise ici à 1 le premier élément !) $$\{\bar{U}_1\}=\begin{Bmatrix}1\\ 1.62\end{Bmatrix},\quad \{\bar{U}_2\}=\begin{Bmatrix}1\\ -0.62\end{Bmatrix}$$

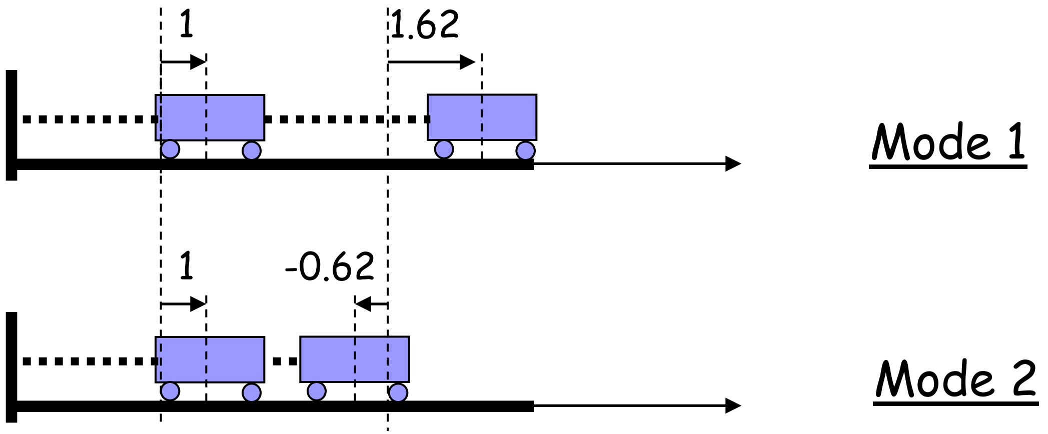
Calcul des fréquences et périodes propres

- A partir des valeurs propres:

$$\lambda_i = \omega_i^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1}\ (rad/s) \rightarrow & \boxed{f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 0.098Hz \quad \rightarrow T_1 = \dfrac{1}{f_1} = 10.19\,s} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \qquad\qquad \rightarrow & \boxed{f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = 0.256Hz \quad \rightarrow T_2 = \dfrac{1}{f_2} = 3.88\,s} \end{cases}$$

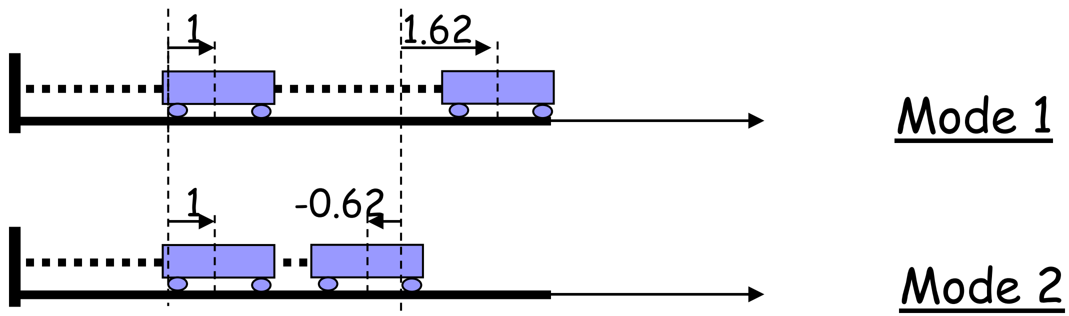
Interprétations graphiques

- MODES PROPRES DE DEFORMEE



Les vecteurs U_1 and U_2 décrivent l'**amplitude relative** des oscillations entre les deux masses.

La réponse dynamique est une somme de modes



La solution générale pour la réponse dynamique à une solicitation quelconque s'écrira : $\{U(t)\} = A\{\overline{U}_1\} \times e^{i\omega_1 t} + B\{\overline{U}_2\} \times e^{i\omega_2 t}$

Le calcul des constantes d'intégration A et B requiert deux conditions initiales.

Propriétés d'orthogonalisation des modes et vecteurs propres

Les modes propres sont définis en principe à une constante près en raison de :

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

Cette condition stipule que l'inverse de la matrice $\left[K-\omega^2 M\right]$ n'est pas unique !

Une constante pour les modes propres peut être déterminée par les conditions d'orthogonalisation :

$$\boxed{\begin{aligned}\langle U_i\rangle[M]\{U_j\} &= \begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}\\ \langle U_i\rangle[K]\{U_j\} &= \begin{cases}\lambda_i \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}\end{aligned}}$$

⟶ $\mathbb{M}$-orthonormalisation

⟶ $\mathbb{K}$-orthogonalisation

Vecteurs propres

Une constante pour les modes propres peut être déterminée par les conditions d'orthogonalisation.

Afin d'obtenir les **vecteurs propres** orthonormaux on normalise préalablement la matrice de rigidité par la masse:

$$K_n = M^{-1/2} \cdot K \cdot M^{-1/2}$$

Avec Matlab on a donc simplement:

Matrice de rigidité normalisée

```
>> [P,L] = eig(Kn)
```

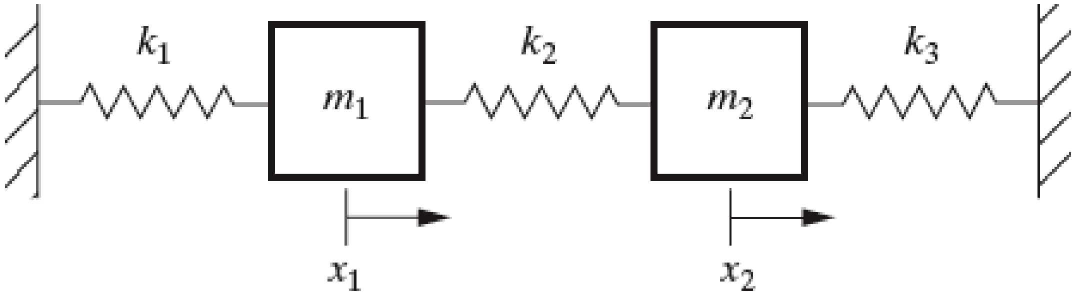
Matrice diagonale des valeurs propres

Matrice des **vecteurs** propres

La matrice des vecteurs propres P est telle que

$$\mathbf{P^T \cdot P} = \textbf{matrice unitaire}$$

Exercice (travail personnel)

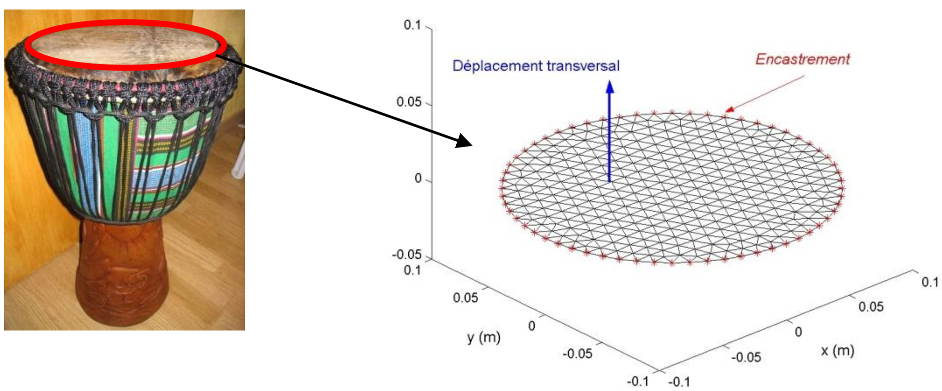


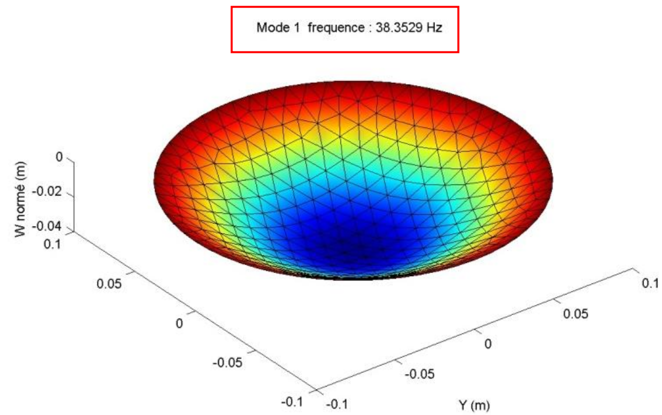
- Paramètres:
  - $m_1 = 1$ kg
  - $m_2 = 4$ kg
  - $k_1 = k_3 = 10$ N/m
  - $k_2 = 2$ N/m

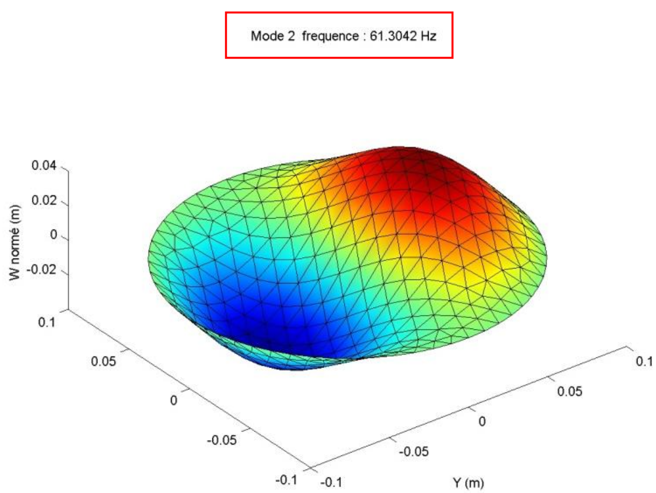
- Calculer:
  - Matrices de rigidité [K] et masse [M]
  - Fréquences propres (Hz)
  - Vecteurs propres normalisés

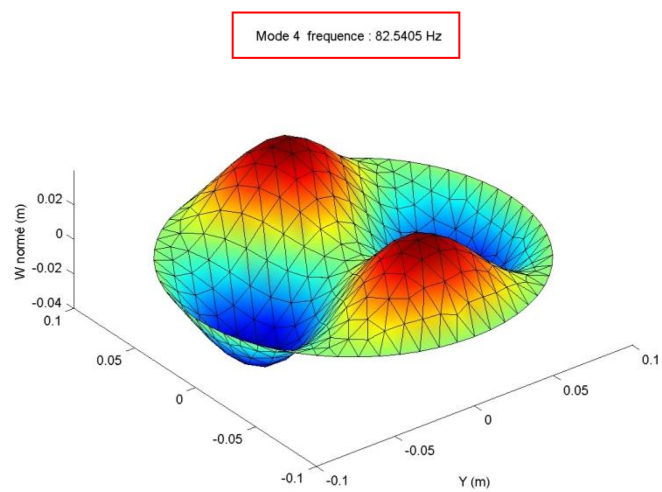
Exemple 2D

<u>Déformées modales d'une membrane tendue (type « tambour »)</u> :





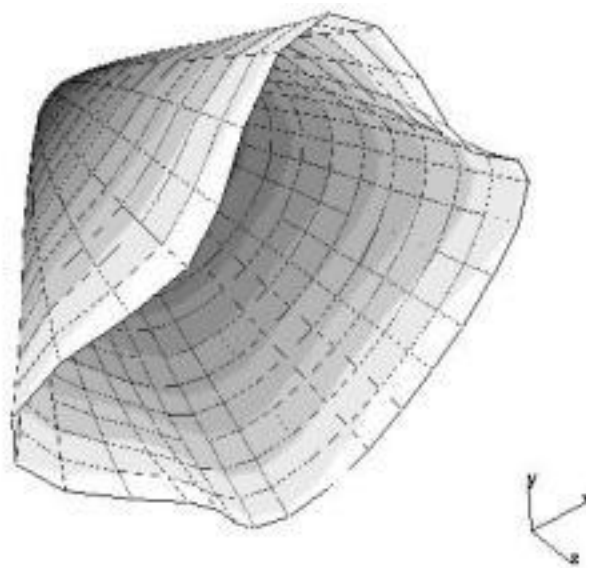




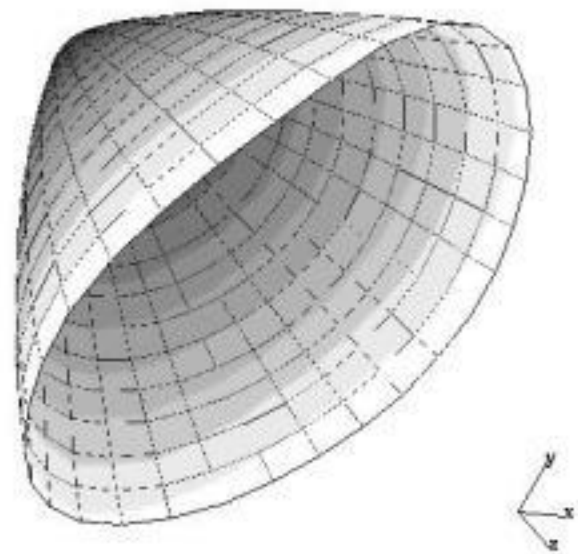
Exemple « industriel » de modes de déformées

<u>Déformées modales du divergent du moteur VULCAIN (Ariane V)</u> :

Source :www.insecula.com



Mode 4-lobes



Mode ovalisation

Source : UTC / MQ06

Modèle réel

Modèle numérique

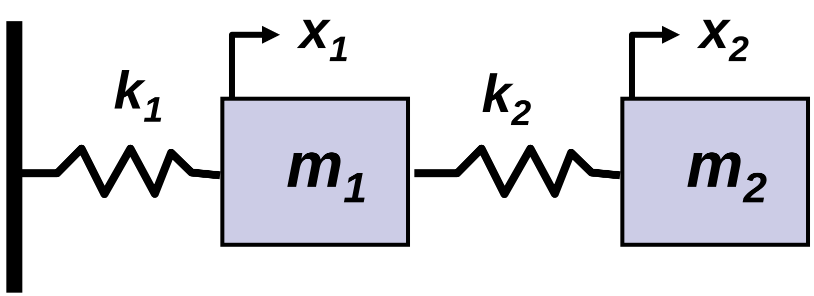
Analyse par décomposition modale

Idée : utiliser les propriétés d'orthogonalisation des vecteurs propres pour diagonaliser le système couplé :

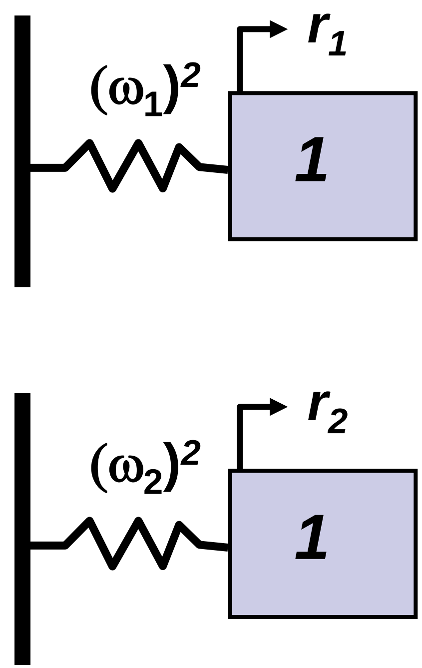
$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{F\}$$

Principe : les vecteurs propres sont tous indépendants et par conséquent, ils définissent une base au sens mathématique du terme.

Les modes et vecteurs propres permettent de découpler les équations et de tranformer un problème à N ddl couplés en N problèmes indépendents à 1 ddl



Coordonnées physiques
Equations découplées



Coordonnées modales
Equations découplées

$$\mathbf{x} = M^{-\frac{1}{2}} P \, \mathbf{r}$$

Transformation modale de multi(N)-ddl en N 1-ddl

- La transformation modale $P^T M^{1/2}$
  transforme notre système à 2 ddl en 2 systèmes à 1-ddl
- Ce qui permet de resoudre chaque ddl comme un système indépendant
- Ensuite par une transformation inverse on reconstitue la solution en coordonnées physiques.

Procedure pour l'analyse modale et la réponse dynamique d'un système multi-ddl

1. Calculer $M^{-1/2}$.
2. Calculer $K_n = M^{-1/2} \cdot K \cdot M^{-1/2}$, (rigidité normalisée).
3. Calculer **ω** et les matrice des vecteurs propres **P**.
4. Calculer $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1/2} \cdot \mathbf{P}$ (matrice des modes propres)
5. Calculer les conditions initiales dans l'espace modal:
   $\mathbf{r(O)} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{x(0)}$.
6. Définir les systèmes découplés dans l'espace modal (un pour chaque mode), chacun caractérisé par $\boldsymbol{\omega}_i$ et, le cas échéant, un coefficient d'amortissement ξ, avec Matlab:

```
sys_i = tf(1, [1/w(i)^2  0  1])
```

8. Calculer pour chaque système découplé la solution **$r_i(t)$** en coordonnées modales avec les conditions initiales. Avec Matlab, par exemple:

```
[y,t,r_i] = initial (ss(sys_i),[r_0(1);0],t);
```

ou

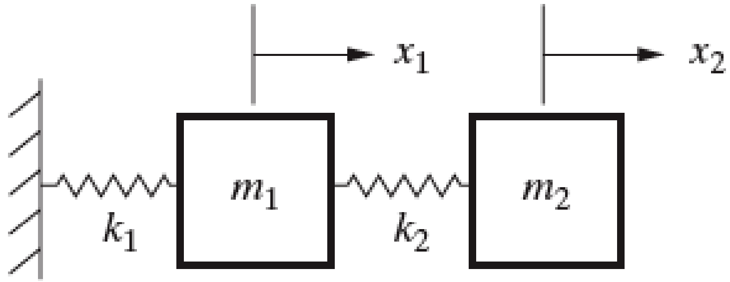
```
[y,t,r_i] = lsim (ss(sys_i),0*t,t,[r_0(1);0]);
```

9. Reconstituer la matrice solution

```
r = [r_1(:,1)'; r_2(:,1)' ]
```

10. Multiplier **$r(t)$** par **S** pour revenir en coordonnées physiques **$x(t) = S \cdot r(t)$**.

Exercice



- <u>Paramètres</u>:
  - $m_1 = 9$ kg
  - $m_2 = 1$ kg
  - $k_1 = 24$ N/m
  - $k_2 = 3$ N/m
  - conditions initiales $x_1 = 1$ mm, $x_2 = 0$

- Calculer:
  - Matrices de rigidité [K] et masse [M]
  - Matrices de rigidité normalisée [Kn]
  - Fréquences propres (Hz)
  - Vecteurs propres normalisés
  - Formuler 2 système 1-ddl non-couplés dans l'espace modal
  - Formuler les conditions initiales dans l'espace modal
  - Calculer la réponse dynamique modale et
  - la reconstituer dans l'espace physique (coordonnées x_1 et x_2).