
Concept expérimental reproduisant l'Etoile Guide Laser

des systèmes d'optique adaptative

Auteur : Bruno DUARTE
Professeurs : Rodolphe CONAN - François WILDI
Engineering Lab Wing
Victoria, Canada - Yverdon-les-Bains, Switzerland

Résumé

Le but de ce travail est de créer une élongation le long de l'axe optique en laboratoire. Cette élongation doit avoir les caractéristiques les plus similaires possibles de l'élongation créée par l'étoile guide laser.

L'étoile guide laser est de plus en plus utilisée dans les grands télescopes. Elle permet une couverture de ciel beaucoup plus grande que les étoiles guides naturelles. Cependant, l'EGL n'est pas parfaite et elle subit plusieurs limitations comme l'effet de cône, la mesure du tip-tilt et l'élongation.

L'analyse de toutes les limitations de l'étoile guide laser est indispensable pour trouver les solutions à ces limitations. Dans la première partie du document, cette analyse est faite ainsi que la proposition de quelques solutions qui sont utilisées aujourd'hui.

Les mesures de l'élongation ont été faites, mais il est important de simuler ce que l'élongation de l'étoile guide laser provoque sur le capteur de front d'ondes au lieu de l'étoile guide naturelle. La simulation ne tient pas compte de tous les effets de l'atmosphère.

Pour construire le prototype qui permet produire l'élongation en laboratoire, il faut passer par l'étude de plusieurs méthodes qui pourraient permettre d'obtenir le résultat voulu. La méthode qui semble le mieux satisfaire les exigences voulues sera retenue et une étude plus approfondie permettra de définir l'élongation réel en laboratoire.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mes parents pour le soutien moral et financier qu'ils m'ont donné tout au long de mes études. Ils m'ont permis de réaliser un de mes objectifs le plus important en toute quiétude.

Je voulais aussi remercier M. F. Wildi de m'avoir permis de réaliser un travail de diplôme dans un domaine très intéressant. Il m'a beaucoup aidé lors de mon travail de semestre pour bien comprendre l'optique adaptative. Je le remercie aussi de m'avoir aussi permis de réaliser mon travail de diplôme à l'université de Victoria au Canada. C'était une expérience très enrichissante où j'ai rencontré plein de gens intéressants et découvert un pays où il fait bon vivre.

Parmis eux, M. R. Conan qui m'a aidé principalement dans mon travail mais aussi dans le domaine privé. Il a toujours su me faire poser les bonnes questions et n'a jamais hésité à me consacrer le temps nécessaire pour la compréhension de certaines notions.

Je tenais par la même occasion remercier l'Ecole d'Ingénieurs et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-VD) pour son aide et pour les facilités qui m'ont été offertes pour que je sois partir au Canada.

Définition d'un concept expérimental reproduisant l'Etoile guide Laser des systèmes d'optique adaptative

Cadre :

L'utilisation d'étoiles guides Lasers (EGL) pour les systèmes d'optiques adaptatives se généralisent dans les Observatoires astronomiques. Tous les projets pour les futurs très grands télescopes prévoient leur incorporation. L'avantage premier d'une EGL est une couverture du ciel plus grande par rapport à celle donnée par une étoile guide naturelle. Cependant l'EGL a quelques désavantages comme l'impossibilité d'estimer le tip-tilt du front d'onde, l'effet de cône et l'élongation de l'EGL le long de l'axe optique. L'élongation en particulier rend l'analyse de front d'onde malaisée due à l'allongement de l'image de l'EGL hors axe. Quelques solutions ont néanmoins été proposées qui permettent une bonne analyse du front d'onde malgré l'allongement. Jusqu'à maintenant ces solutions n'ont été étudiées que par simulation et il serait souhaitable de les valider expérimentalement.

Objectifs

Voici la spécification des exigences pour le travail de semestre.

L'étudiant devra définir un ou plusieurs concepts d'EGL reproduisant de manière satisfaisante une EGL située à 90km au dessus de la pupille d'un télescope et présentant une élongation selon l'axe optique de 10km. Les avantages et désavantages de(s) concept(s) devront être clairement établies et la procédure de mise en oeuvre de l'EGL expérimentale définie.

Démarche

1. Acquisition de la connaissance liée à la problématique de l'EGL (tip-tilt, effet de cône, élongation, etc.)
2. Modélisation numérique d'une EGL prenant en compte essentiellement l'élongation.
3. Recensement des différents concepts permettant de reproduire une source étendue le long de l'axe optique en laboratoire.
4. Choix d'un ou de quelques concepts et analyse détaillée des avantages et inconvénients de chacun.
5. Choix du concept définitif et établissement de la procédure de mise en oeuvre.

Table des matières

Intro	1
1 Etoile Guide Laser (EGL)	3
1.1 Principe	4
1.2 Effet sur le tilt	4
1.2.1 Mesure à partir d'une étoile naturelle	4
1.2.2 "Shift & Add"	5
1.2.3 Tip-tilt mesuré dans l'IR	6
1.2.4 Etoile laser polychromatique	6
1.3 Effet de cône	7
1.3.1 Résolution du problème dû à l'effet de cône	7
1.4 Elongation	8
1.5 Variation d'altitude	9
2 Modélisation numérique	11
2.1 Faisceau Gaussien	12
2.2 Intensité	13
2.3 Projection sur le WFS	16
2.4 Projection de la figure d'intensité	20
2.4.1 Définition des paramètres	23
Matrice des lenslet	23
Matrice d'échantillonnage	24
Paramètre t	25
Angles directeurs	25
Evolution du paramètre t	26
2.5 Résultats	26
2.5.1 Analyse des résultats et conclusion	26
3 Catalogue de solutions	29
3.1 Pseudo Infinity Guide Stars (PIGS)	29

3.1.1	Avantages	30
3.1.2	Inconvénients	30
3.2	Four à sodium	32
3.2.1	Avantages	32
3.2.2	Inconvénients	32
3.3	Défocalisation dynamique	33
3.3.1	Avantages	34
3.3.2	Inconvénients	34
3.3.3	Exemple d'un profil cyclique	36
3.4	Holographie	38
3.4.1	Hologramme statique	38
	Avantages	39
	Inconvénients	39
3.4.2	Hologramme dynamique	39
	Avantages	40
	Inconvénients	40
3.5	Fibre optique dénudée	40
3.5.1	Avantages	41
3.5.2	Inconvénients	41
3.6	Récapitulatif	42
3.7	Conclusions	43
4	Procédure de mise en oeuvre	45
4.1	Mise à l'échelle	45
4.2	Flux généré par l'hologramme	47
4.3	Etude de faisabilité d'un hologramme 3D avec SLM	50
4.4	Utilisation du SLM en lentille $f(r)$	50
	Conclusion	55
	A Bibliographie	57
	B Routines Matlab	59
B.1	Description des routines	59
B.1.1	Forme d'onde	59
B.1.2	Elongation	59
B.1.3	Visualisation en 3D	59
B.1.4	Intensité axiale	59
B.1.5	Projection élongation unitaire	60
B.1.6	Projection de la figure d'intensité	60

B.1.7	PSF de l'élongation	60
B.2	Listing des routines	60
B.2.1	Forme d'onde	60
B.2.2	Elongation	61
B.2.3	Irradiance	63
B.2.4	Visualisation en 3D	65
B.2.5	Intensité axiale	66
B.2.6	Projection élongation unitaire	68
B.2.7	Projection de la figure d'intensité	71
	Calcul de l'intensité (fonction)	71
	Calcul de l'intensité (fonction)	75
	Projection et organisation des données (fonction)	77
B.2.8	PSF de l'élongation	78
C	Publications	81
D	Datasheets	97

Table des figures

1.1	Effet tilt : Le faisceau laser montant est réfracté par le tilt atmosphérique. En descendant, le faisceau est réfracté dans le sens inverse à celui de la montée. Il revient donc sur la pupille du télescope sans information sur le tilt.	5
1.2	Effet de cône : l'erreur augmente si l'altitude de l'étoile laser diminue ou si le diamètre de la pupille du télescope augmente.	8
1.3	Modèle de l'élongation réelle dans la couche de sodium.	9
1.4	Résultat des mesures de <i>L. Michaille</i> faites sur le site de La Palma. Les graphiques représentent un profil de densité de sodium qui inclut plusieurs couches sporadiques simultanées (a) et en (b) un profil très régulier de sodium.	10
2.1	Définitions des variables	12
2.2	Amplitude du faisceau en fonction du paramètre T.	13
2.3	La courbe bleue représente l'intensité calculée avec l'équation 2.2 dans le plan focal. La courbe rouge représente l'intensité sur le plan focal pour les grandes valeurs de r_n et finalement la croix verte indique la valeur de l'intensité maximale.	15
2.4	Les deux courbes calculées d'après l'équation générale et l'équation 2.3 se superposent parfaitement.	16
2.5	Vue en trois dimensions de la figure d'intensité à $90km$	17
2.6	Position de l'intensité maximum en fonction de la distance focale.	18
2.7	Figure d'intensité pour une distance focale de $96km$	19
2.8	Schéma de la projection de l'élongation unitaire sur une lenslet.	19
2.9	Déplacement des spots pour une élongation théorique unitaire.	21
2.10	Schéma de la procédure de projection de la figure d'intensité.	22
2.11	Coordonnées des lenslet en fonction du diamètre de la pupille.	23
2.12	Détermination des valeurs maximales de la matrice d'échantillonnage.	24
2.13	Projection de l'EGL sur le WFS.	27

3.1	Schéma de montage du concept de la méthode de PIGS	30
3.2	Une tache de la taille b reflétée par la tige sera transformée en arc. L'angle de l'arc est une fonction du rayon r de la tige	31
3.3	Pour n ELG, il faut n montages de PIGS.	31
3.4	Schéma illustrant le concept avec le four à sodium. Les pertes d'information et d'énergie dues au beam splitter sont de 75% Les autres pertes du système ne sont pas quantifiées.	32
3.5	Schéma de principe du montage de défocalisation dynamique. Sur cette figure sont représentées les deux positions extrêmes, $f1$ et $f2$ du point lumineux. Au repos, le point va se trouver un milieu de $f1$ et $f2$	33
3.6	Dans le cas (a) seul le cône énergétique divergent à une influence sur l'intensité de l'élongation, contrairement au cas (c) où seulement le cône énergétique convergent contribue à l'intensité. Dans le cas (b) autant le cône énergétique convergent que divergent influencent l'intensité totale de l'élongation	35
3.7	Allure de la somme de l'intensité générée par un flux conique.	35
3.8	Profil de vitesse pour obtenir une plus forte intensité au centre que sur les bords.	36
3.9	Profil d'accélération calculé d'après le profil de vitesse voulu. Les pointes d'accélération se trouvent à chaque changement de direction du point lumineux.	37
3.10	Les zones représentées par des bandes rouges sont interdites pour la projection sur le WFS. Les courbes bleues dans les zones rouges donnent un exemple de profil de vitesse pour éviter les sauts de vitesse.	38
3.11	Principe de la création de l'élongation avec un hologramme statique. .	39
3.12	Schéma simplifié pour produire l'élongation avec un SLM et un laser.	40
3.13	Coupe d'une fibre optique montrant les différentes régions la composant : coeur, gaine optique et gaine de protection.	41
4.1	Mise à l'échelle de la pupille du télescope et de l'EGL	46
4.2	Schéma de principe du montage avec SLM. Les proportions et les échelles ne sont pas gardés!	47
4.3	Hypothèse de travail de l'illumination des pixels.	49
4.4	Relation entre la position de l'élongation et le rayon du SLM	50
4.5	Phase φ en fonction du rayon du SLM r_h	52
4.6	PSF de l'élongation	52
4.7	Echantillonnage sur le SLM pour une élongation comportant 100 points.	53

Introduction

L'utilisation d'étoiles guides Lasers (EGL) pour les systèmes d'optiques adaptatives se généralisent dans les observatoires astronomiques. Tous les projets pour les futurs très grands télescopes prévoient leur incorporation. L'avantage premier d'une EGL est une couverture du ciel plus grande par rapport à celle donnée par une étoile guide naturelle. Cependant l'EGL a quelques désavantages comme l'impossibilité d'estimer le tip-tilt du front d'onde, l'effet de cône et l'élongation de l'EGL le long de l'axe optique. L'élongation en particulier rend l'analyse de front d'onde malaisée due à l'allongement de l'image de l'EGL hors axe. Quelques solutions ont néanmoins été proposées qui permettent une bonne analyse du front d'onde malgré l'allongement. Jusqu'à maintenant ces solutions n'ont été étudiées que par simulation et il serait souhaitable de les valider expérimentalement.

Avant d'entrer dans le sujet proprement dit, on va étudier les difficultés et les limitations engendrées par l'EGL, celles décrites dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire le manque d'information sur le tip-tilt atmosphérique, l'effet de cône et l'élongation le long de l'axe optique. A ces limitations, on décrira quelques unes des méthodes utilisées à cette date pour remédier à cette problématique.

L'étude est axée dans l'élongation de l'étoile guide laser. Même si plusieurs mesures ont déjà été faites de l'élongation de l'EGL, nous allons faire une simulation de celle-ci. Le but de cette simulation, toutefois très simplifiée qui permet d'avoir un résultat approximatif de la projection de l'élongation sur le *Wavefront Sensor*. On calculera la figure de diffraction provoqué par le tir d'un faisceau laser à l'altitude de l'élongation et dans un deuxième temps on la projète sur le WFS.

Aucune étude n'a pour le moment pas été faite pour créer une élongation en laboratoire. Pour pouvoir trouver la méthode qui reproduit l'EGL avec un maximum de fiabilité, on va analyser plusieurs concepts, les comparer entre eux, mettre en évidence les avantages et les inconvénients de chacun. On peut alors aisément faire un choix pour une méthode qui nous paraîtra la meilleur pour arriver à nos objectifs.

Finalement, le concept choisi va être étudié plus en détail, on analysera toutes les possibilités pour définir ce que pratiquement sera possible de faire ou de ne pas faire. Dans cette partie sera aussi fourni un schéma de principe de tout le système.

Chapitre 1

Etoile Guide Laser (EGL)

La nécessité de l'étoile laser pour l'optique adaptative (AO) vient de la difficulté à trouver une source de référence suffisamment brillante dans le domaine d'isoplanétisme¹. La probabilité de trouver une source qui satisfait ces critères diminue fortement avec la longueur d'onde et vers le pôle galactique². Celle-ci dépend aussi de la qualité de correction et donc de la turbulence. A titre d'exemple, la couverture du ciel est de 2% pour obtenir un rapport de Strehl³ de 50% en bande K⁴ sur un télescope de 8 mètres (VLT — Very Large Telescope) dans de bonnes conditions de *seeing* et pour une latitude galactique moyenne. Celle-ci chute à 0.1% pour des conditions de *seeing* médiocres et 0.01% lorsqu'on s'approche du pôle galactique. L'étoile laser permet de faire passer la couverture de 2% à 30% car elle subit certaines limitations, décrites à partir de la section 1.2, l'empêchant ainsi d'être la méthode standard pour une couverture du ciel de 100%. Néanmoins son utilisation est très importante pour beaucoup d'applications, surtout pour des applications extragalactiques.

¹La lumière issue de deux objets vus sous un angle inférieur à l'angle d'isoplanétisme ont la même atmosphère. Cet angle est de l'ordre d'un à quelques secondes d'arc. Dans ce domaine, la réponse impulsionnelle télescope + atmosphère est constante et l'on peut appliquer la relation de convolution objet-image, base de toutes les méthodes de reconstruction existantes.

²Endroit de notre galaxie où la densité d'étoiles est faible

³Rapport entre l'énergie du front d'onde déformé et celle d'un front d'onde parfait (front d'onde plat). Si le résidu tend vers un déphasage nul, alors le rapport de Strehl tend vers 1

⁴Bande de longueurs d'onde dans la photométrie astronomique. La bande K correspond à $\lambda = 2200\text{nm} \pm 200\text{nm}$

1.1 Principe

L'idée d'une étoile laser est née dans les années 1985 par Foy & Labeyrie mais l'armée américaine avait déjà étudié le concept quelques années auparavant. Le but est d'augmenter la portion de ciel qui peut être observée par des télescopes disposant d'une AO. Grâce au laser, on crée une référence artificielle brillante, permettant ainsi une bonne qualité de correction. Il existe deux techniques différentes pour créer une étoile guide laser :

- L'excitation avec un laser des molécules de sodium situées dans une couche atmosphérique à environ $90km$. Le laser doit être accordé avec la longueur d'onde d'excitation de l'atome de sodium. L'excitation des atomes produit une lumière qui va être captée par le télescope.
- Les étoiles basées sur la diffusion Rayleigh Mie utilisent la rétrodiffusion du rayon laser par les molécules de l'air. Cette méthode ne requiert pas une longueur d'onde spécifique pour le laser, simplement une bonne puissance pour que la mesure puisse être faite avec précision.

Dans la suite de ce projet je considère que des ELG basées sur la désexcitation du sodium.

1.2 Effet sur le tilt

Le problème de l'indétermination du tilt par une étoile laser est causé par le principe du retour inverse de la lumière. En effet, si le faisceau laser est émis sur l'axe optique, la lumière va parcourir le même chemin en "montant" (chemin depuis le sol vers l'atmosphère) qu'en descendant. L'image mesurée ne subit donc pas l'effet du tilt. Ceci ne se produit pas avec une étoile naturelle car la lumière provenant d'une EGN ne traverse qu'une fois l'atmosphère et subit qu'une fois l'effet du tilt.

Plusieurs concepts ont été proposés pour mesurer le tilt mais aucun n'a encore été démontré et validé. Cependant je décris dans les sections suivantes quelques uns de ces concepts.

1.2.1 Mesure à partir d'une étoile naturelle

La méthode la plus "simple" est d'utiliser une étoile naturelle pour mesurer le tilt. L'utilisation d'une étoile laser permet d'utiliser une étoile naturelle moins brillante

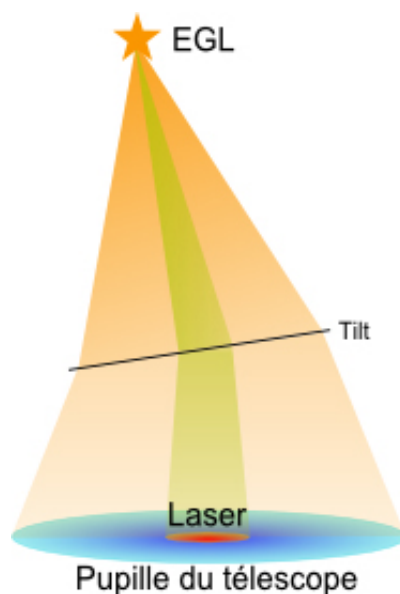


FIG. 1.1 – Effet tilt : Le faisceau laser montant est réfracté par le tilt atmosphérique. En descendant, le faisceau est réfracté dans le sens inverse à celui de la montée. Il revient donc sur la pupille du télescope sans information sur le tilt.

car toute la pupille du télescope est utilisée pour mesurer ce mode. Ce gain n'est possible que si la voie d'analyse bénéficie d'un système d'AO. Cependant, comme l'ont souligné Rigaut & Gendron (1992), le gain apporté par une étoile laser avec référence de tilt naturelle n'est pas aussi grand que souhaité, car la contribution du tilt à la variance du front d'onde représente 87 % (donc il faut le corriger très précisément pour ne pas limiter les performances du système OA) et la dégradation due à l'anisoplanétisme de tilt n'est "que" deux fois plus lente que pour les modes plus élevés.

1.2.2 "Shift & Add"

La méthode du "Shift & Add", consiste à enregistrer des images de courte pose et à les additionner en les recentrant a posteriori. Il faut que les objets soient plus brillants à la longueur d'onde d'observation (généralement dans l'IR) qu'à la longueur d'onde de mesure du front d'onde (généralement dans le rouge visible). On enregistre sur le CCD des courtes poses de l'objet, qui profitent de la correction d'une AO. Leur rapport de Strehl instantané est meilleur, ce qui augmente l'intensité de pic. On peut alors détecter (plus facilement qu'à la longueur d'onde de l'analyseur de surface d'onde), le pic le plus brillant de l'objet et faire un recentrage. Cette méthode empêche une hypothétique couverture du ciel de 100% puisque tous

les objets astronomiquement intéressants ne sont pas rouges. De plus, si on utilise des objets diffus comme source de référence, le pic est en général beaucoup moins marqué. Enfin ces objets doivent être assez brillants pour que l'on puisse détecter ce pic sur une image de courte pose.

1.2.3 Tip-tilt mesuré dans l'IR

Cette méthode profite des mêmes principes physiques que dans le précédent cas mais la correction de l'image est faite en temps réel, avec une mesure du tip-tilt dans l'IR. Ce procédé est au moins aussi efficace que le "Shift & Add", puisqu'on n'introduit pas de bruit dans les images scientifiques en lisant le détecteur à une cadence élevée. On bénéficie aussi du fait qu'il y a plus d'étoiles pouvant servir de référence dans l'IR mais les contraintes technologiques sont plus fortes, puisqu'il faut un détecteur infrarouge (plus bruité que dans le visible). Le bruit en provenance du fond du ciel est plus élevé ce qui réduit la magnitude limite. Finalement la dernière difficulté est que la lumière doit être divisée entre la voie capteur et le CCD, si les deux fonctionnent dans l'IR.

1.2.4 Etoile laser polychromatique

L'étoile laser polychromatique, proposée par Foy et al. (1992 et 1995), est le concept le plus prometteur. Il consiste à utiliser un effet de second ordre sur le tilt. Si on arrive à produire une étoile laser émettant au moins à deux longueurs d'onde différentes, on peut en déduire le tilt à partir de la différence des tilts mesurés dans chaque couleur. L'amplitude de cette différence dépend de l'écartement en longueur d'onde des différentes couleurs de l'étoile.

$$\theta = \Delta\theta \cdot \frac{n-1}{\Delta n} \quad (1.1)$$

où :

- θ est le tilt ;
- $\Delta\theta$ le tilt différentiel (i.e. la différence du tilt mesuré aux deux longueurs d'onde) ;
- n l'indice de l'air à la longueur d'onde d'observation ;
- Δn la différence d'indice de l'air pour les deux longueurs d'onde.

Dans le cas du sodium, si on émet deux longueurs d'onde proches (l'une à 589 *nm* et l'autre à 569 *nm*), on obtient en retour, via une cascade radiative, des photons depuis l'UV (330 *nm*) jusqu'au proche infrarouge (2.3 μm). Les principales difficultés de cette méthode sont de deux ordres. Pour mesurer le tilt différentiel, il faut une bonne précision sur la mesure du centre de gravité des images de l'étoile laser, ce qui impose un flux suffisant en provenance des différentes longueurs d'onde et donc un (des) laser(s) suffisamment puissant(s). De plus, l'indice de l'air varie relativement peu dans l'IR et le visible. Pour augmenter la sensibilité, il est préférable d'observer une transition dans l'UV et une autre dans le visible/infrarouge. Sans EGN, on n'a pas d'information sur les vibrations du télescope et celles-ci sont importantes car la mesure du tilt différentiel dépend aussi de la stabilité de l'instrument (le tilt différentiel donne seulement une information sur la composante atmosphérique du tilt). Il faut donc mesurer ces vibrations de façon très précise, ce qui semble possible grâce à un séismomètre. C'est un défi considérable que de résoudre ces difficultés liées au tilt mais l'enjeu est une couverture du ciel de 100%.

1.3 Effet de cône

L'effet de cône est provoqué par l'altitude finie et relativement proche de la couche de sodium. La lumière provenant d'une étoile naturelle situé à l'infini forme un faisceau parallèle (collimaté). Or les rayons issus de l'étoile laser forment un cône avec la pupille du télescope et ont une forme sphérique. Le laser sonde mal les couches à haute altitude, à savoir que les bords ne sont pas mesurés, et de plus ce qui est mesuré, est dilaté sur toute la pupille rendant les mesures fausses. L'effet de cône a aussi une influence sur la mesure du tilt.

1.3.1 Résolution du problème dû à l'effet de cône

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème dû à l'effet de cône, les unes plus efficaces et plus complètes que d'autres. La méthode la plus utilisée consiste à créer plusieurs ELG au dessus de la pupille du télescope, ainsi on peut mieux sonder l'atmosphère. Cependant, il existe différentes façon d'analyser plusieurs ELG. Parmi celles-ci, la plus complète pour les grands diamètres de pupille est sans

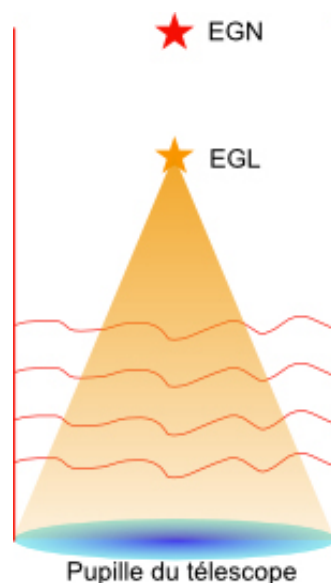


FIG. 1.2 – Effet de cône : l'erreur augmente si l'altitude de l'étoile laser diminue ou si le diamètre de la pupille du télescope augmente.

doute la "méthode 3D" proposée par Tallon & Foy (1990) puis, Tallon et al. (1992). L'idée est de construire un système d'équations linéaires décrivant les turbulences de phase à une altitude donnée. Ensuite, en inversant le système d'équations, il est possible de calculer la commande applicable au miroir déformable. Le fait est que, le système nécessite peut de lasers (3 ou 4 suivant la précision voulue) et permet l'augmentation du champ corrigé en changeant le nombre d'actuateurs sur le miroir, en recalculant le système d'équations (matrice d'interaction) et repositionnant les étoiles guides laser, en font les principaux avantages.

1.4 Elongation

La couche de sodium présente dans l'atmosphère à $90km$ n'est pas d'épaisseur négligeable. En effet, d'après *L. Michaille* la couche de sodium a une épaisseur de $10km$ approximativement. Ce paramètre est rarement stable et varie au court du temps et du lieu de mesure. La conséquence principale du fait que la couche ne soit pas mince, est que le faisceau laser ne va pas seulement exciter les molécules de sodium sur le plan focal, mais sur toute la longueur de la couche créant ainsi un volume lumineux de quelques dizaines de centimètres de diamètre et quelques kilomètres de long (figure 1.3). L'effet de parallaxe sur les grands télescopes rend la

mesure des surfaces d'onde très difficile. D'après certains scientifiques, l'élongation ainsi produite par l'EGL limiterait son utilisation pour les ELT⁵.

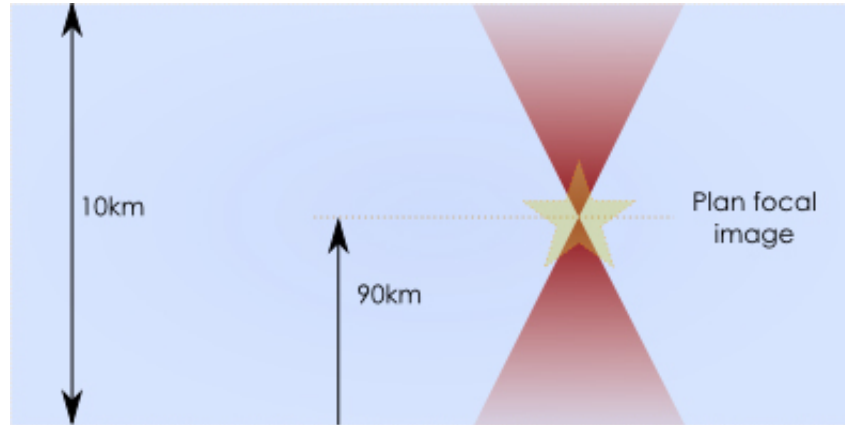


FIG. 1.3 – Modèle de l'élongation réelle dans la couche de sodium.

1.5 Variation d'altitude

Les inhomogénéités du volume lumineux peuvent varier rapidement dû aux caractéristiques de la couche et à une distribution non-uniforme de la densité des atomes de sodium comme le montre la figure 1.4. Deux effets distincts agissent sur la couche de sodium : les variations de la densité des atomes de sodium peuvent provoquer un déplacement du centre de gravité de la couche, et l'altitude de la couche varie au cours du temps ainsi que son épaisseur. Ces variations très rapides (sporadiques) créent une variation rapide de l'altitude moyenne de la source et compromettant la mesure du mode de défocalisation. Cette altitude moyenne dépend aussi de la distance zénithale. La difficulté apporté devient difficilement gérable sur un ELT.

⁵Extremely Large Telescope, prochaine génération de très grands télescopes

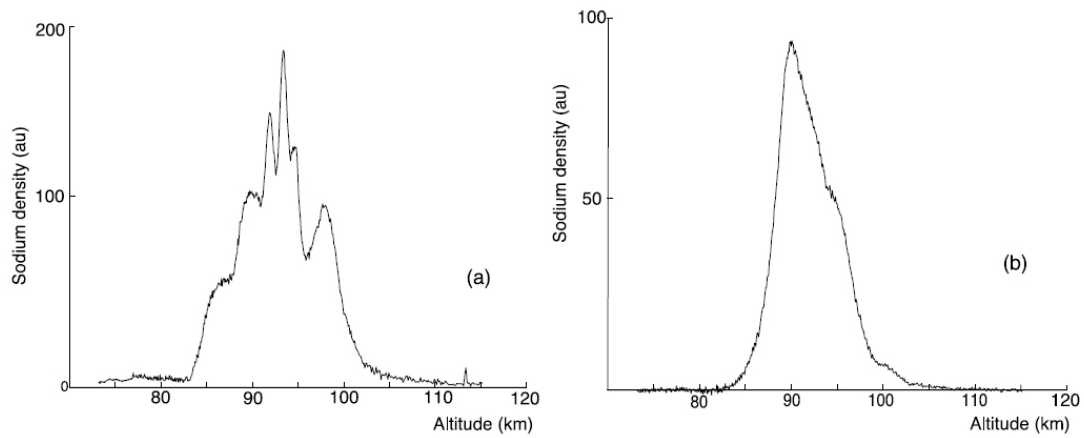


FIG. 1.4 – Résultat des mesures de *L. Michaille* faites sur le site de La Palma. Les graphiques représentent un profil de densité de sodium qui inclut plusieurs couches sporadiques simultanées (a) et en (b) un profil très régulier de sodium.

Chapitre 2

Modélisation numérique

Pour pouvoir poursuivre l'étude il est important d'avoir une idée des caractéristiques de l'EGL pour élaborer un prototype en laboratoire permettant d'avoir un comportement le plus similaire possible de la réalité. Pour cela, il faut construire une simulation numérique qui tient compte de certaines hypothèses et de certaines simplifications. Les principes physiques intervenant dans la modélisation demandent une étude approfondie, je vais donc procéder par étapes avant d'arriver au résultat final. Premièrement je vais m'intéresser à la nature du faisceau qui va être propagé dans l'atmosphère. Deuxièmement je vais calculer la figure d'intensité à $90km$ d'altitude avec une épaisseur de la couche de sodium de $10km$. Ensuite, je vais projeter un simple trait de lumière le long de l'axe optique sur le WFS. Finalement, projeter sur le WFS la figure d'intensité. Les formules utilisées pour le calcul de l'intensité dans ce chapitre sont issues du document *Spot size, depth-of-focus, and diffraction ring intensity formulas for truncated Gaussian beams* de Hakan Urey, je ne vais pas expliquer les détails des formules, juste les utiliser telles qu'elles sont présentées dans le document. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est important de mettre en évidence toutes les hypothèses et simplifications de la simulation.

- le faisceau laser montant ne subit pas l'effet des turbulences atmosphériques ;
- on ne tient pas compte de la rétrodiffusion des atomes de sodium, seule la diffraction est prise en compte ;
- le faisceau descendant ne tient pas compte non plus des turbulences atmosphériques ;

riques ;

2.1 Faisceau Gaussien

Le laser utilisé pour exciter les particules de sodium aura un profil gaussien. La diffraction d'un faisceau plat n'est pas la même que pour un faisceau gaussien. Définissons les variables dans la figure 2.1 :

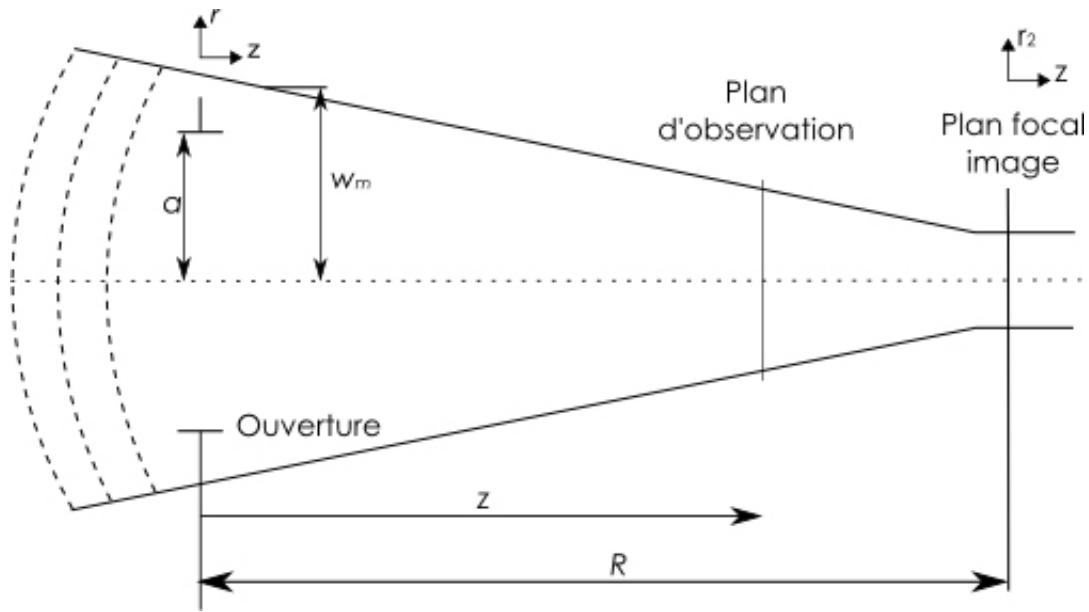


FIG. 2.1 – Définitions des variables

- a correspond au rayon de la pupille du télescope d'émission ;
- ω_m correspond au rayon du faisceau ;
- z est la distance de l'ouverture jusqu'au plan d'observation ;
- R est la distance de l'ouverture jusqu'au plan focal gaussien ;

L'amplitude d'une onde gaussienne est donnée par la formule 2.1 :

$$|U(r, \omega_m)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega_m} \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_m^2}\right) \quad (2.1)$$

Le faisceau est caractérisé par le rapport de troncation du faisceau Gaussien $T = \frac{\omega_m}{a}$. Il faut donc déterminer la valeur de T qui s'adapterait le mieux à nos exigences. La figure 2.2 à la page 13 montre l'évolution de l'amplitude lorsqu'on varie le rapport de troncation.

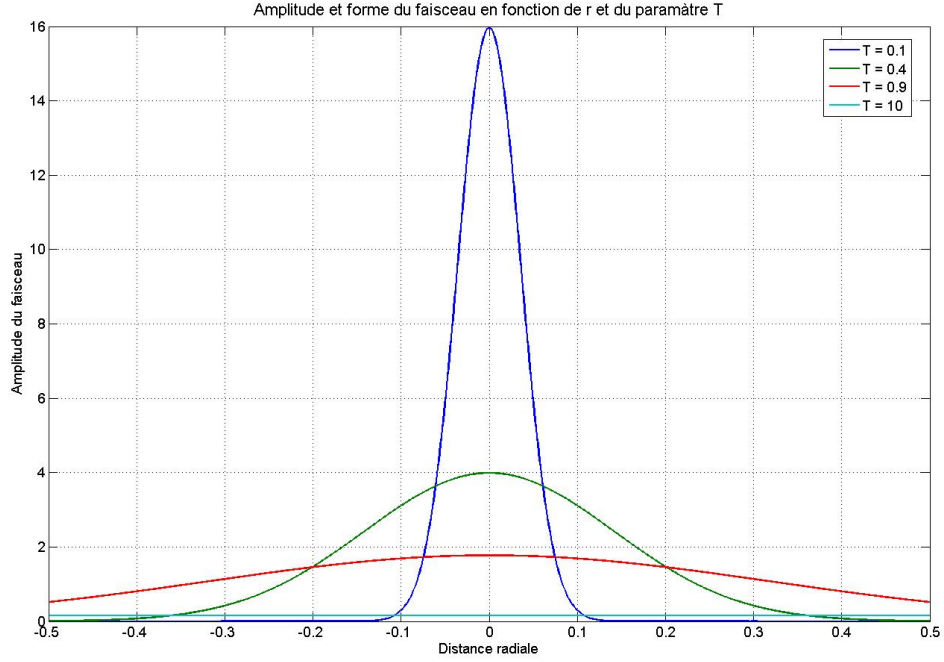


FIG. 2.2 – Amplitude du faisceau en fonction du paramètre T .

La surface sous la courbe reste constante et plus le paramètre T tend vers de grandes valeurs, plus on s’approche du cas d’une onde plane. Dans le cas présent, l’idéal serait un faisceau qui soit étalé sur toute la pupille d’émission et que l’amplitude tende vers zéro lorsque celle-ci s’approche des bords de la lentille.

2.2 Intensité

L’intensité calculée est seulement celle provoquée par la diffraction du faisceau laser focalisé à $90km$. L’intensité due à la désexcitation des atomes de sodium n’intervient pas dans le cas présent. En outre, les turbulences atmosphériques sont négligées, autant à l’aller qu’au retour.

L’intensité de l’EGL est donnée par la formule suivante :

$$I(T, r_n, z) = \frac{8\pi a^2}{\lambda^2 z^2 T^2 P_{beam}} \times \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{\rho^2}{T^2}\right) \exp\left[\frac{i\pi\rho^2 a^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right)\right] J_0\left(\frac{\pi\rho r_n R}{z}\right) \rho d\rho \right|^2 \quad (2.2)$$

Où :

- $\rho = \frac{r}{a}$ est l'ouverture de la pupille normalisée;
- $r_n = \frac{r_2}{\lambda \cdot f_{\#}}$ est la longueur radiale sur le plan focal normalisée;
- $f_{\#} = \frac{R}{2 \cdot a}$ est le nombre ouverture;
- $P_{beam} = 1 - \exp(-2/T^2)$ correspond à la puissance du faisceau;
- λ correspond à la longueur d'onde du faisceau laser, dans ce cas $589nm$ (longueur d'onde d'excitation des atomes de sodium);

L'équation 2.2 permet de calculer l'intensité sur la zone que nous voulons étudier. Une fois l'équation écrite dans le logiciel de simulation, il faut vérifier que celle-ci est programmée correctement. Pour cela, je vais comparer les résultats obtenus avec l'équation générale avec certains cas particuliers à savoir l'intensité le long de l'axe optique en fonction de z $I_{axiale}(T, z)$, l'intensité axiale sur le plan focal $I_0(T)$ ainsi que l'intensité sur le plan focal pour les grandes valeurs de r_n $I_{focal}(T, r_n)$.

Définition des équations pour les trois cas particuliers cités ci-dessus :

$$I_{axial}(T, z) = \frac{2 \pi a^2 T^2 [\coth(1/T^2) - \cos(\frac{\pi N \Delta z}{z}) / \sinh(1/T^2)]}{\lambda^2 z^2 (1 + \frac{\pi^2 T^4 N^2 \Delta z^2}{z^2})} \quad (2.3)$$

$$I_0(T) = \frac{\pi \cdot T^2 [1 - \exp(-1/T^2)]^2}{2 \cdot \lambda^2 \cdot f_{\#}^2 [1 - \exp(-1/T^2)]} \quad (2.4)$$

$$I_{focal}(T, r_n) = \frac{4 \cdot \exp(-1/T^2)}{\lambda^2 \cdot f_{\#}^2 \cdot \pi^3 \cdot r_n^3 \cdot T^2 \cdot P_{beam}} \cdot \sin^2(\pi \cdot r_n - q) \quad (2.5)$$

Où

- q correspond à un facteur de phase en fonction de r_n et de T . Il vaut 0.84 pour $T = 1$;
- $N = a^2/\lambda \cdot R$ est le nombre de Fresnel;

Cependant, la figure 2.4 montre que l'intensité n'est pas maximale lorsqu'on se trouve sur le plan focal mais à une altitude inférieure au plan focal. On vérifie aussi cette affirmation sur la figure suivante.

Pour trouver à quelle distance doit-on placer le plan focal pour que l'intensité soit maximale, il faut que la dérivée de l'intensité par rapport à z soit nulle. Mathématiquement on peut écrire;

$$\frac{d}{dz} I_{axiale}(T, z) = 0$$

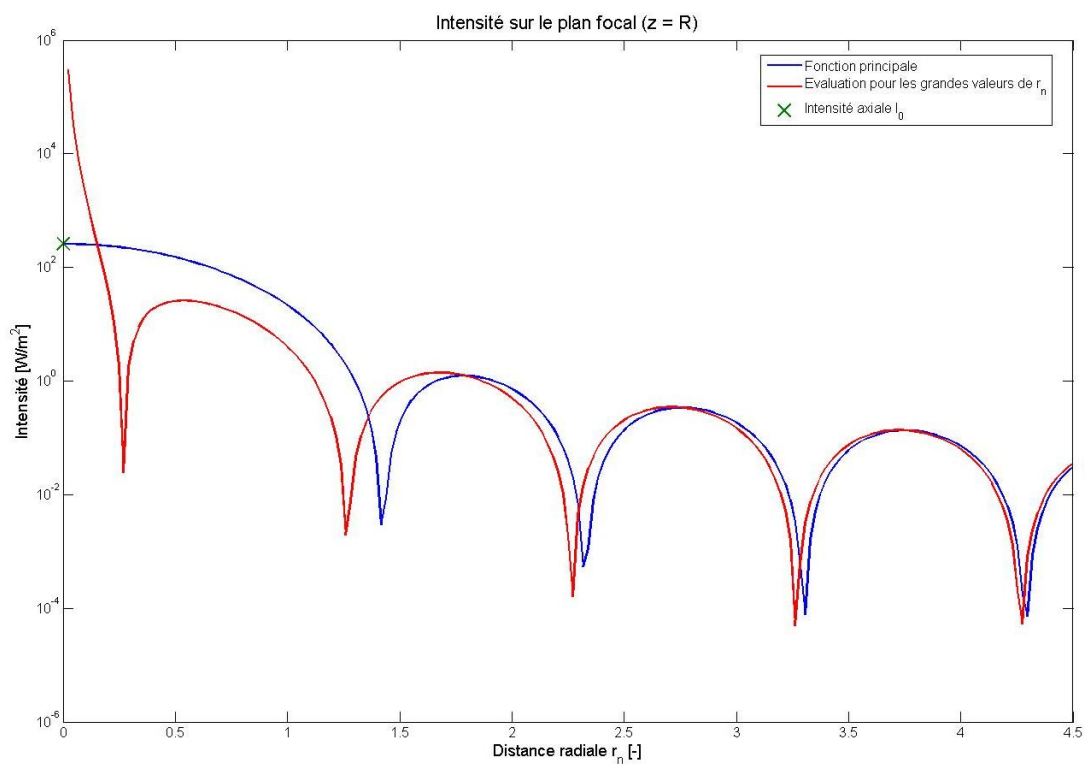


FIG. 2.3 – La courbe bleue représente l'intensité calculée avec l'équation 2.2 dans le plan focal. La courbe rouge représente l'intensité sur le plan focal pour les grandes valeurs de r_n et finalement la croix verte indique la valeur de l'intensité maximale.

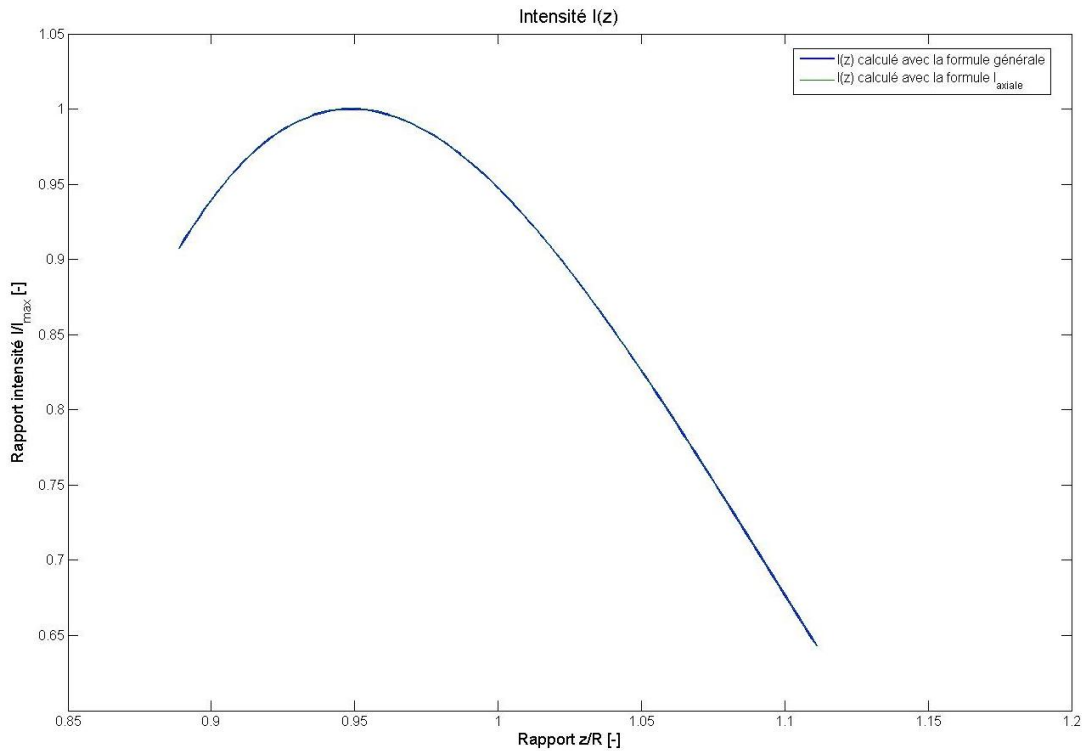


FIG. 2.4 – Les deux courbes calculées d’après l’équation générale et l’équation 2.3 se superposent parfaitement.

La résolution avec de l’équation permet d’obtenir les résultats de la figure 2.6. On remarque aisément que la distance l’intensité maximale est plus basse que la distance focale et vaut environ $86km$. Pour avoir une intensité maximale à $90km$ il faudrait focaliser le faisceau à $96km$.

La figure d’intensité avec un tir à $96km$ est montrée à la page 19, figure 2.7

Cependant malgré cette différence, en pratique on focalise quand même à $90km$ car la valeur de l’intensité est inversement proportionnelle à la distance focale. Donc même si l’intensité est plus concentré à $90km$ pour un tir à $96km$, sa valeur est plus faible que pour un tir à $90km$.

2.3 Projection sur le WFS

La figure d’intensité calculée dans la section précédente doit être projetée sur le WFS. Avant de procéder directement à la projection du volume d’intensité, je vais calculer la projection d’une élongation unitaire le long de l’axe optique. De cette façon-la, on peut obtenir une idée de ce qu’on doit avoir sur le WFS après

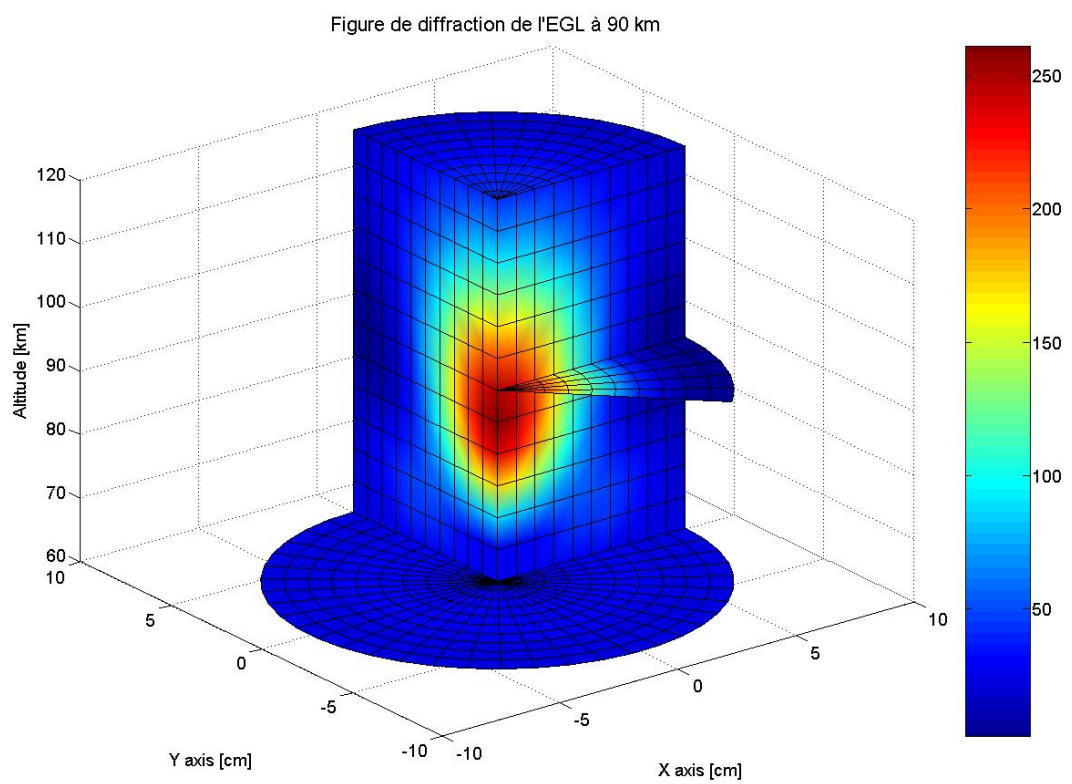


FIG. 2.5 – Vue en trois dimensions de la figure d'intensité à 90km.

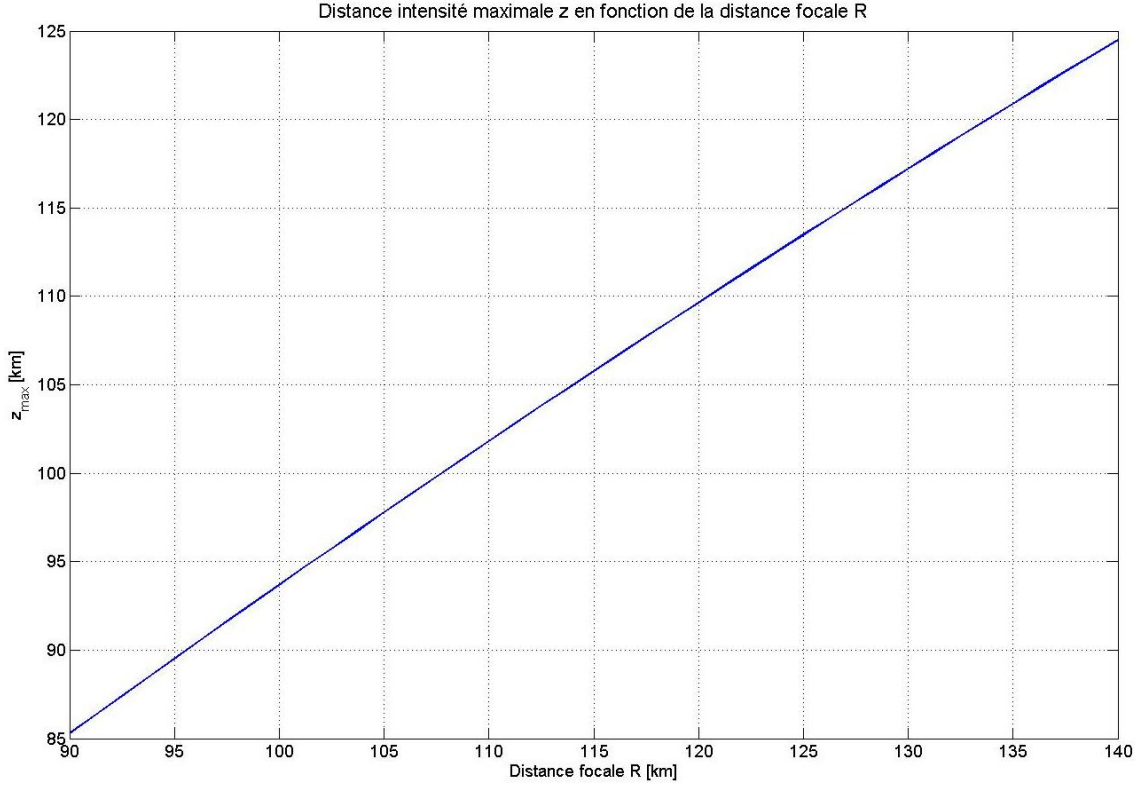


FIG. 2.6 – Position de l'intensité maximum en fonction de la distance focale.

la projection de l'EGL. Pour commencer j'ai projeté les lenslet sur la pupille du télescope tout avec un rapport unitaire (c'est-à-dire que les m actuateurs d'une rangée correspondent au diamètre D de la pupille du télescope). Ainsi pour $D = 30m$ et pour un WFS avec 16×16 lenslet, le diamètre d'une lenslet projetée sur la pupille est donné par;

$$d = \frac{D}{m} = \frac{30}{16} = 1.875m \quad (2.6)$$

Il va de même pour la distance focale des lenslet. Pour une distance focale de $8mm$ sur la lenslet, so conjugué sur la pupille du télescope vaut $F = f \cdot m$.

Les angles θ_A et θ_B peuvent être définis par;

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{R + l}{d \cdot i - d/2}\right) \quad (2.7)$$

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{R}{d \cdot i - d/2}\right) \quad (2.8)$$

Le paramètre i permet de définir n'importe quelle lentille dans le WFS¹. Les rayons

¹Ces équations s'appliquent pour le cas particulier le long d'un axe de référence. C'est assez trivial de déduire les équations pour une position quelconque dans le plan.

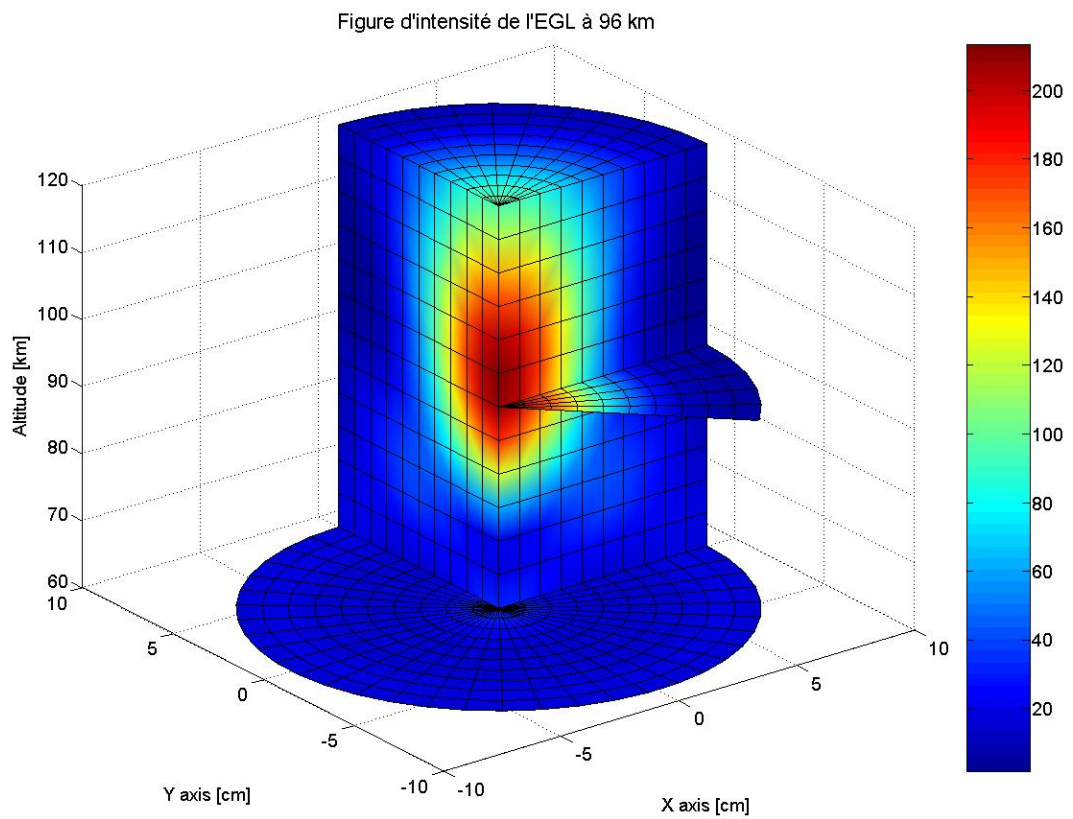


FIG. 2.7 – Figure d'intensité pour une distance focale de 96km.

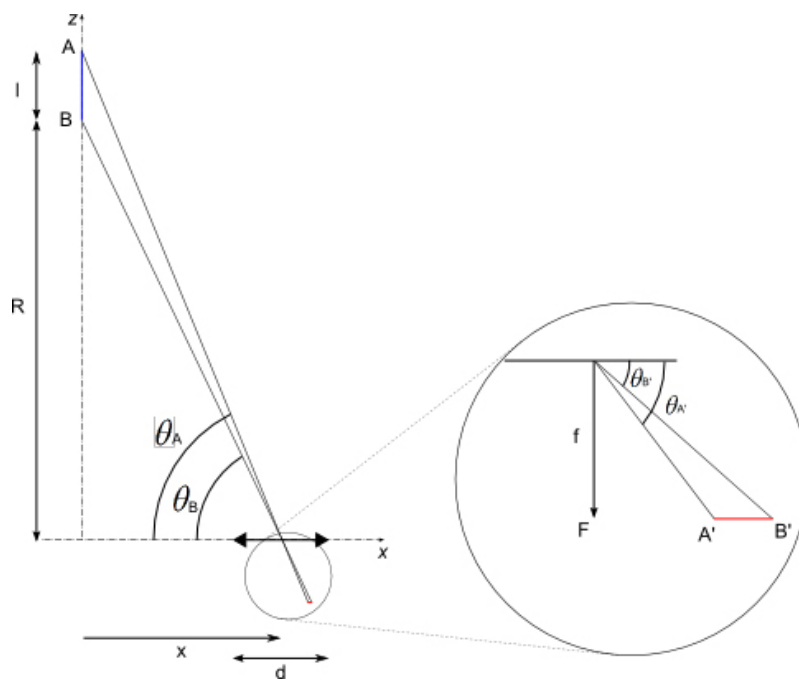


FIG. 2.8 – Schéma de la projection de l'élongation unitaire sur une lenslet.

qui passent au centre de la lentille lenslet ne sont pas déviés. Les angles θ_A et θ_B sont alternes internes avec $\theta_{A'}$ et $\theta_{B'}$ et par conséquent :

$$\theta_A = \theta_{A'} \quad (2.9)$$

$$\theta_B = \theta_{B'} \quad (2.10)$$

La distance $A'B'$ est calculée avec la différence des chemins jusqu'au point focal f .

$$\begin{aligned} FA' &= \frac{f}{\tan \theta_{A'}} \\ FB' &= \frac{f}{\tan \theta_{B'}} \\ A'B' &= FB' - FA' \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le calcul pour chaque lentille permet d'obtenir le déplacement du spot sur le CCD. Sur la figure 2.9 page 21, on obtient ce qu'on devrait avoir dans un cas réel avec une élongation unitaire (cette simulation ne tient pas compte des perturbations atmosphériques).

2.4 Projection de la figure d'intensité

Une façon d'obtenir la projection de la figure d'intensité est de passer par la géométrie analytique. En mettant une grille d'échantillonnage sur la base de la figure de diffraction, on peut trouver les équations paramétriques de la droite qui relie le centre de la lenslet à un point de la grille (voir figure 2.10). Ainsi en faisant varier la droite grâce au paramètre t et parcourant la grille, on peut alors parcourir l'espace où la figure d'intensité aura lieu. On procède de la façon suivante : on choisit une lenslet, puis on calcule les paramètres (angles et coordonnées) pour relier le centre de la lenslet à un point de la grille d'échantillonnage. Puis on augmente le paramètre t , jusqu'à ce qu'on dépasse l'altitude maximum de l'élongation ($95km$). Pour chaque valeur de t , il faut calculer les coordonnées x, y et z . Ainsi, on a toutes les informations pour calculer l'intensité en ce point d'après la formule 2.2. L'intensité est sommée pour chaque point et projetée sur le WFS. Il faut répéter l'opération pour chaque point de la grille d'échantillonnage puis pour chaque lenslet.

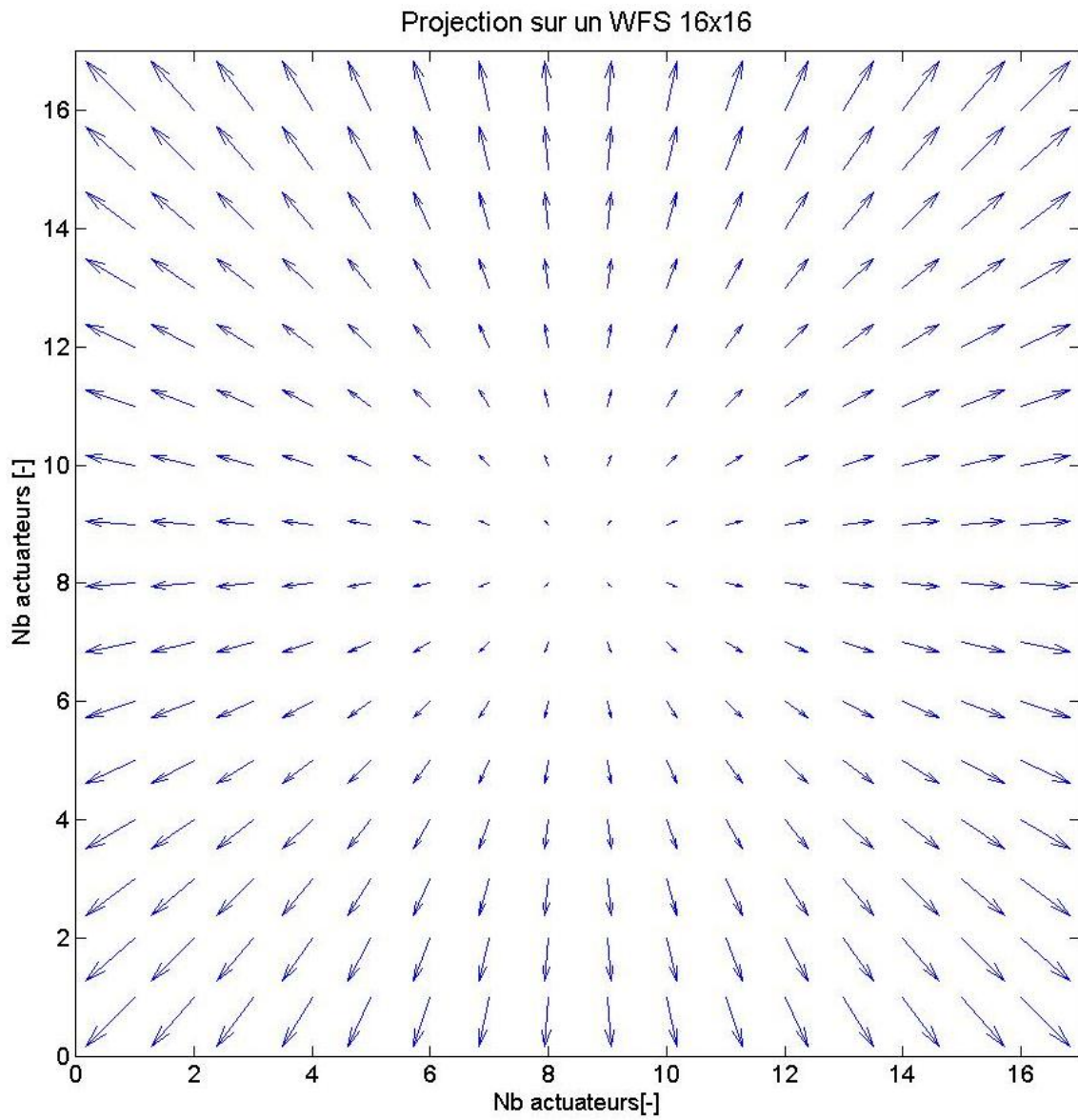


FIG. 2.9 – Déplacement des spots pour une élongation théorique unitaire.

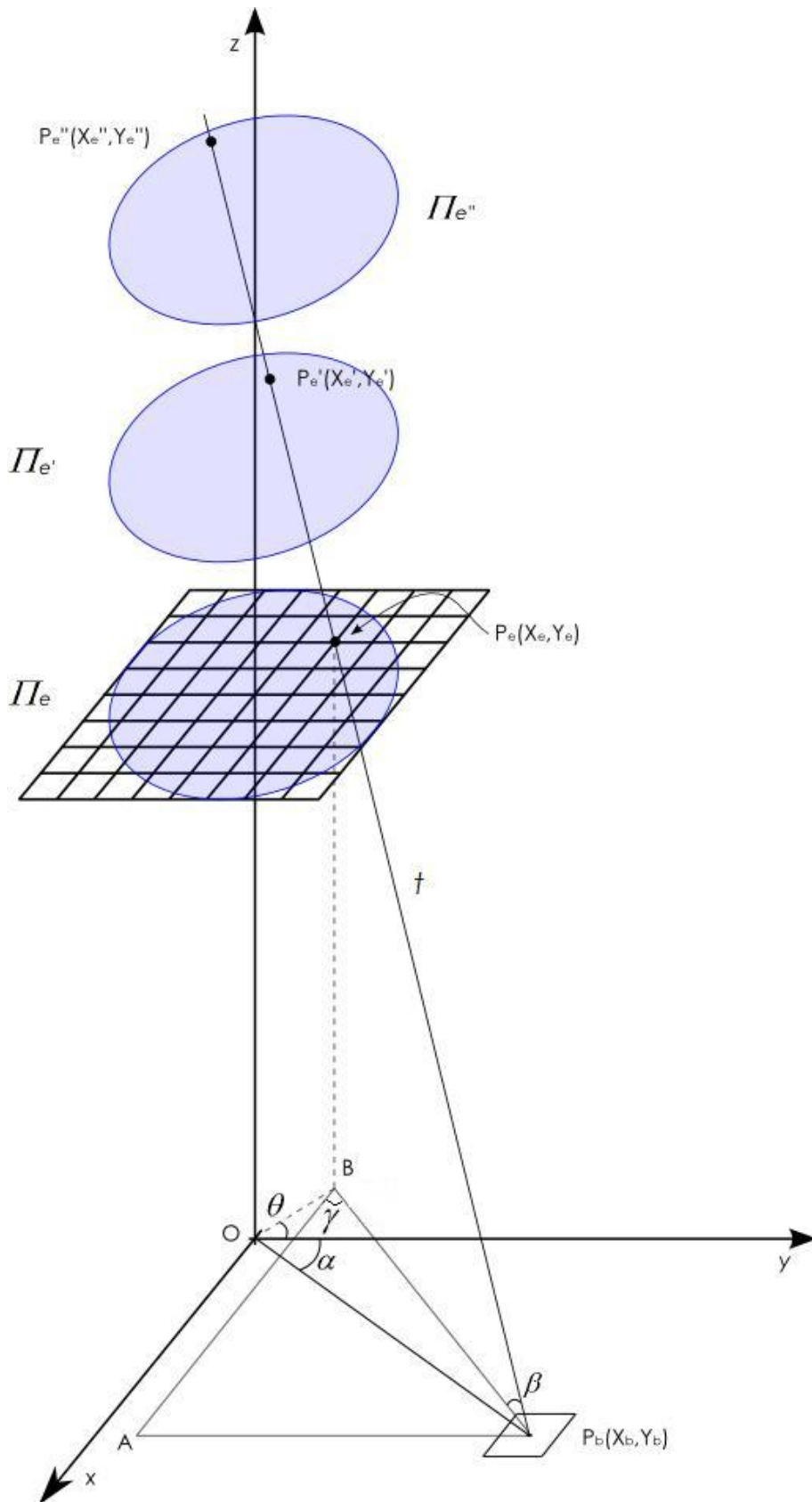


FIG. 2.10 – Schéma de la procédure de projection de la figure d'intensité.

La figure 2.10 à la page 22 présente un cas général de la projection de l'intensité sur le WFS, conjugué sur la pupille du télescope. P_b est la position sur le plan de base (plan de la pupille) d'une lenslet. Sur le plan Π_e , placé au début de l'élongation ($z = 85km$), on trouve la matrice d'échantillonnage. Prenons un point de cette matrice P_e . Les équations paramétriques qui relient dans l'espace le point P_b au point P_e sont les suivantes;

$$\begin{aligned}x &= x_b - \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot t \\y &= y_b - \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot t \\z &= \sin(\beta) \cdot t\end{aligned}\tag{2.12}$$

2.4.1 Définition des paramètres

Matrice des lenslet

Les coordonnées des lenslet sont déterminées en fonction de la taille de la pupille du télescope et du nombre de lenslet que le WFS possède. Dans le cas présent, la pupille du télescope a 30 mètres de diamètre et le WFS a 16x16 lenslet. On retrouve le cas suivant :

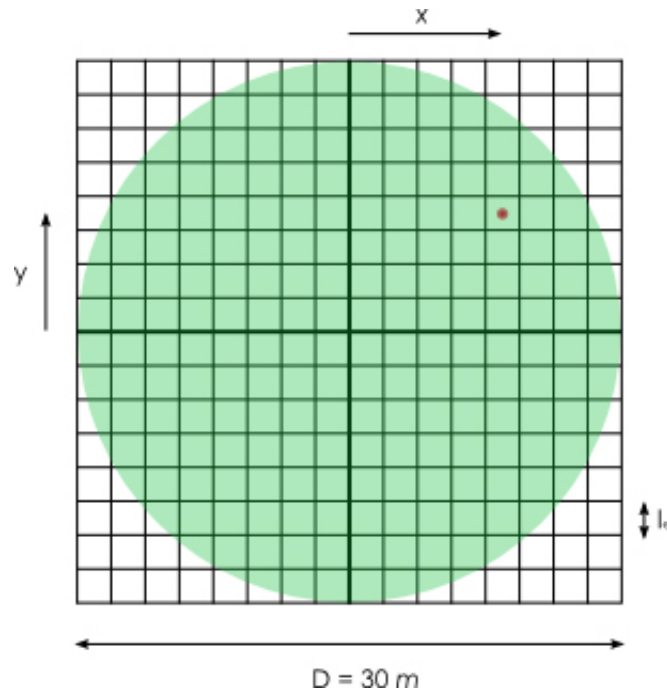


FIG. 2.11 – Coordonnées des lenslet en fonction du diamètre de la pupille.

En se basant sur la figure 2.11 page 23, on peut trouver les coordonnées du centre de la lenslet de la façon suivante :

$$\begin{aligned} l_e &= \frac{D}{16} \\ x &= l_e \cdot i - \frac{l_e}{2} \\ y &= l_e \cdot j - \frac{l_e}{2} \end{aligned}$$

Les paramètres i et j varient de -8 à 8 , vu que le système de coordonnées est centré sur la pupille.

Matrice d'échantillonnage

La matrice d'échantillonnage ne se place pas exactement sous l'élongation vu que celle-ci a un diamètre $D_e = 32cm$. De ce fait, il faut aussi projeter le coté de l'élongation jusqu'au point le plus haut de cette dernière comme le montre la figure 2.12.

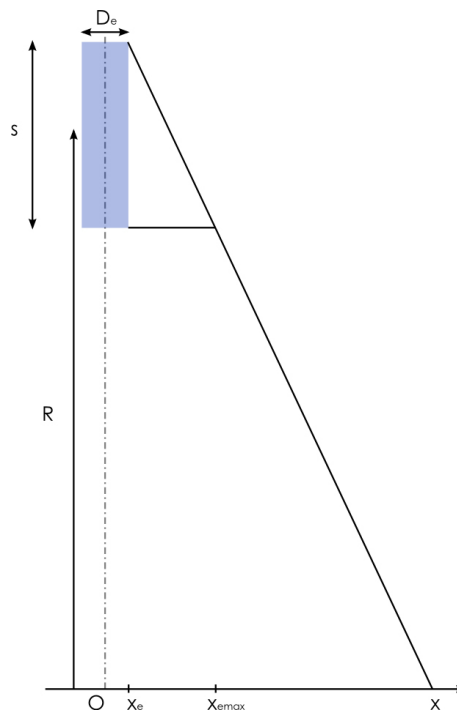


FIG. 2.12 – Détermination des valeurs maximales de la matrice d'échantillonnage.

$$\frac{R + S/2}{x} = \frac{S}{x_{emax} - x_e}$$

$$x_{emax} = \frac{x \cdot S}{R + S/2} + x_e$$
(2.13)

En appliquant les définitions vues précédemment et les valeurs numériques, on trouve alors :

$$x_{emax} = \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{l_e}{2}\right) \cdot S}{R + S/2} + x_e$$

$$x_{emax} = \frac{\left(\frac{30}{2} - \frac{1.875}{2}\right) \cdot 10'000}{90'000 + 10'000/2} + 0.16$$

$$x_{emax} = 1.64[m]$$

De la même façon que pour la matrice des lenstet, la matrice d'échantillonnage est centrée sur l'axe optique. Le nombre de points choisis dans la matrice est en fonction de la précision voulue lors de la simulation.

Paramètre t

La détermination du paramètre t doit se faire pour l'altitude de la matrice d'échantillonnage. En se basant sur la figure 2.10 à la page 22, on peut alors déduire t , qui vaut la distance entre le centre d'une lenstet et un point de la matrice est défini par :

$$t(x, y, z) = P_e - P_b$$

$$t = \sqrt{(x_e - x_b)^2 + (y_e - y_b)^2 + (z_e - z_b)^2}$$

L'application numérique doit se faire pour chaque coordonnée de la matrice et de la lenstet. Par la suite le paramètre t varie mais c'est indépendamment de ce calcul. La façon dont on le fait varier dépend du nombre de valeurs désirées et aussi de la valeur maximale qu'il doit atteindre. Cela est expliqué un peu plus loin dans cette section.

Angles directeurs

Les angles directeurs ont une importance capitale pour les équations paramétriques. C'est grâce à ces angles qu'on peut déterminer les nouvelles coordonnées

lorsqu'on a fait varier t , en laissant tous les autres paramètres bloqués. Toujours en se basant sur la figure 2.10 à la page 22, les trois angles α , β et γ peuvent être définis comme suit :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_b}{y_b}\right) \quad (2.14)$$

$$\overline{P_bB} = \sqrt{(x_b - x_e)^2 + (y_b - y_e)^2}$$

Mais $\overline{P_bB}$ est aussi égal à :

$$\overline{P_bB} = \cos(\beta) \cdot t$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{(x_b - x_e)^2 + (y_b - y_e)^2}}{t}\right) \quad (2.15)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{x_b - x_e}{\overline{P_bB}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{x_b - x_e}{\cos(\beta) \cdot t}\right) \quad (2.16)$$

Evolution du paramètre t

Comme expliqué dans le début de cette section, le paramètre t évolue alors que tous les autres restent verrouillés. L'incrément est choisi en fonction de la précision avec laquelle on veut sonder l'élongation.

$$\Delta t = \frac{\frac{S}{nt}}{\sin(\beta)} \quad (2.17)$$

Où nt correspond au nombre de points qu'on veut avoir dans l'élongation.

Maintenant que tous les paramètres sont définis, il faut exécuter la simulation et présenter les résultats. L'algorithme *Matlab* et ses fonctions utilisées sont décrites dans l'annexe de ce document. On peut aussi y trouver une mode d'emploi.

2.5 Résultats

2.5.1 Analyse des résultats et conclusion

Alors que toutes les centroïdes devraient être au centre, résultat obtenu avec une étoile guide naturelle située à l'infini. La figure 2.13 montre justement que l'étoile guide laser provoque un déplacement des centroïdes. Le fait que le spot ne soit pas

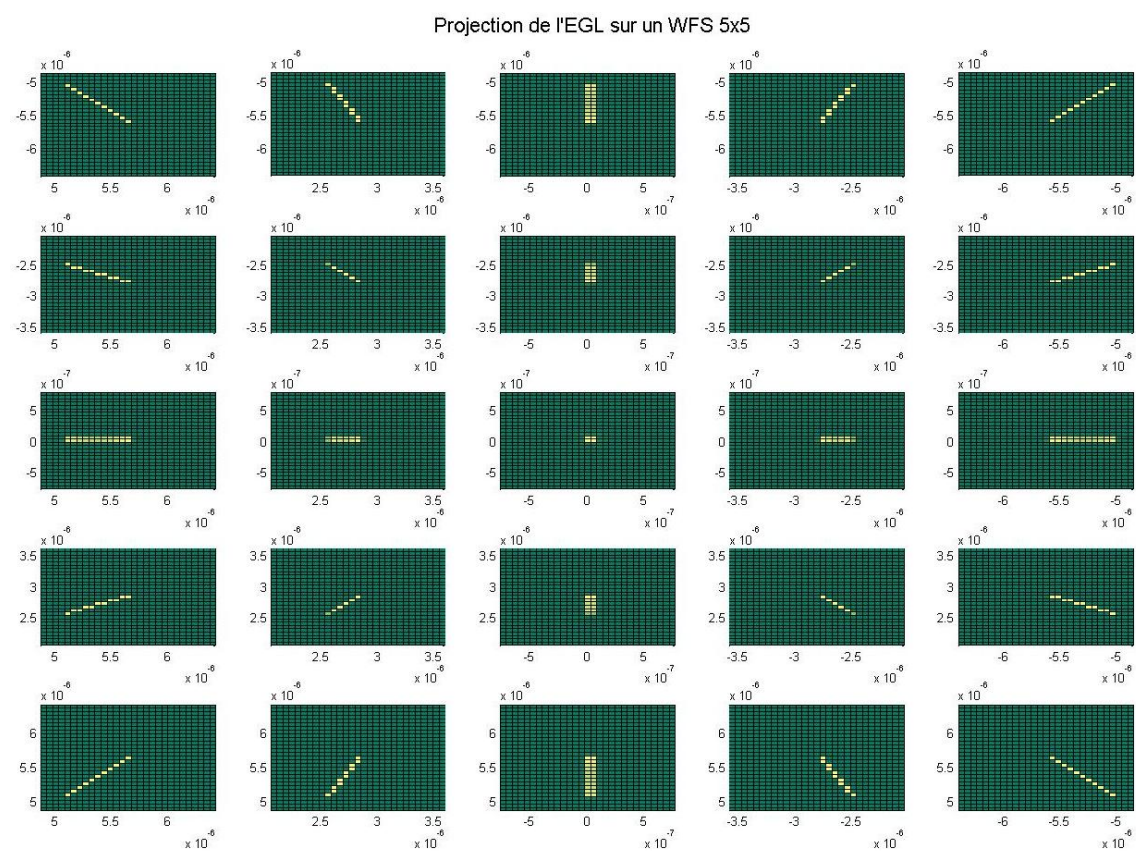


FIG. 2.13 – Projection de l'EGL sur le WFS.

centré sur la lentille est provoqué par l'altitude non infinie de l'EGL. Le déplacement du centroïde est quand à lui provoqué par l'élongation. En réalité, on obtient pas un trait mais plutôt une forme ovale pour le déplacement du centroïde. Si les résultats ne le montrent pas, est à cause de l'échantillonnage assez faible. La matrice d'échantillonnage est constituée de 30x30 points. En sachant que physiquement elle fait 3.28m, cela donne un point tous les 110mm or le diamètre de l'élongation fait, dans le cas présent, 160mm. Par conséquent, lorsqu'on se déplace d'un échantillon, la valeur de l'intensité devient tout de suite très faible voire nulle. La simulation donne des résultats valables mais les hypothèses qui ont été faites pénalisent énormément la crédibilité de ceux-ci. La simulation a été exécutée avec 5x5 lentille et non avec les 16x16 comme c'était prévu au départ car le temps de simulation est trop long (environ 36 heures). Les résultats mettent toutefois en évidence la difficulté d'analyse d'une étoile guide laser.

Chapitre 3

Catalogue de solutions

Créer une élongation sur l'axe optique n'est pas chose courante, en tout cas dans l'état actuel de la technique. Afin de pouvoir mieux identifier la méthode la plus correcte pour pouvoir créer l'élongation en laboratoire, je vais commencer par chercher quelques concepts dans la littérature et dans le milieu de l'optique adaptative. Une fois trouvé quelques idées prometteuses, je vais les étudier plus en détail et déterminer les avantages, les inconvénients ainsi que la possibilité de construire le prototype dans le laboratoire. Il faut que le concept permette :

- l'élongation de la tache de diffraction le long de la couche de sodium ;
- profil d'intensité d'élongation variable en fonction de la densité de la couche Na ;
- variation de la position de l'élongation le long de l'axe optique qui représente la variation de l'altitude moyenne de la couche de sodim.

Il faut que le système s'intègre sur le banc optique déjà existant. Le coût du système est pris en compte, sans être pour autant un facteur décisif.

3.1 Pseudo Infinity Guide Stars (PIGS)

D'après une étude menée par *S. Keller*¹ il est possible de créer l'image de l'élongation en un point. Si cette étape est possible, certainement que la réciproque l'est aussi. En effet, l'idée de base de ce concept serait depuis une source ponctuelle très

¹"PIGS" on Sky — Dream or Reality

lumineuse créer une élongation comme le montre la figure 3.1.

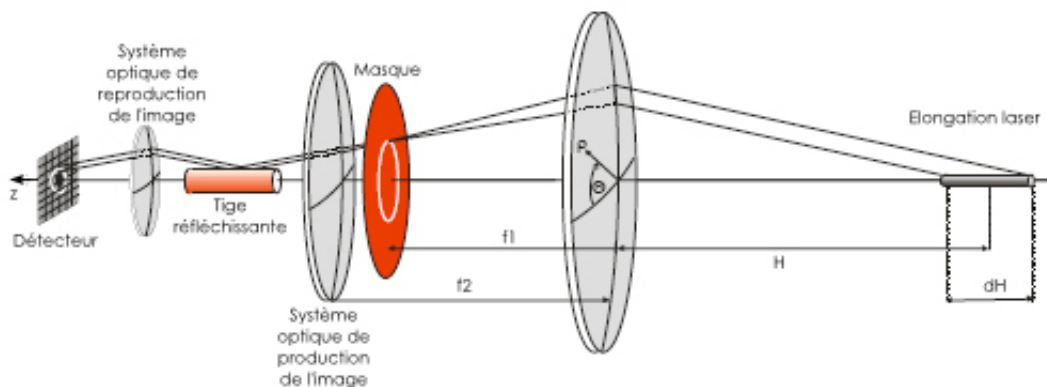


FIG. 3.1 – Schéma de montage du concept de la méthode de PIGS

3.1.1 Avantages

Le fait qu'il soit entièrement réalisable avec des instruments optiques enlève les contraintes dues à l'électronique comme la calibration, les réglages, le paramétrage et d'autres aléas de l'électronique.

3.1.2 Inconvénients

Le fait d'avoir un système totalement optique est aussi un inconvénient car pour toute modification du système, il faut remettre la totalité du montage en cause ce qui le rend très peu souple aux adaptations. De plus les pertes ne sont pas négligeables. La source ponctuelle de départ va être étendue sur la longueur d'élongation (dH). Par conséquent, il faut que la source ponctuelle ait une énergie minimale pour que l'élongation ait suffisamment d'énergie. Une autre limitation vient des aberrations optiques de la tige réfléchissante. Toute tache plate sera transformée en arc dû à la courbure de la tige (figure 3.2). Ce système ne permet pas non plus d'avoir un profil d'intensité ni une variation de la position de l'élongation le long de l'axe optique. Un autre inconvénient vient du fait que si on veut adapter le système pour remédier au problème de l'effet de cône, avec plusieurs EGL, il faut à chaque fois dupliquer le montage pour chaque élongation. En conclusion, ce système semble complexe à mettre en oeuvre, ne semble pas suffisamment aptes aux modifications et aux adaptations pour pouvoir simuler des situations plus complexes que la simple EGL.

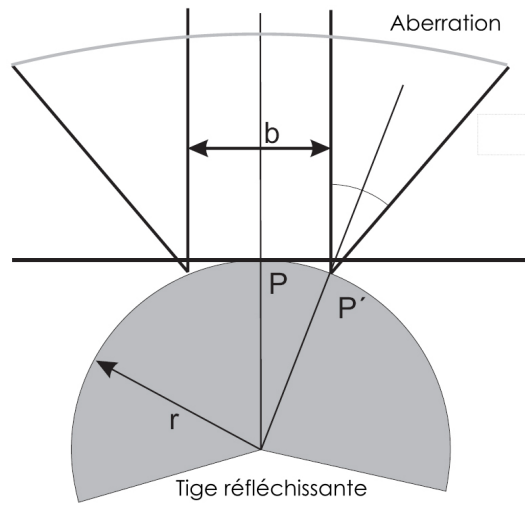


FIG. 3.2 – Une tache de la taille b reflétée par la tige sera transformée en arc. L'angle de l'arc est une fonction du rayon r de la tige

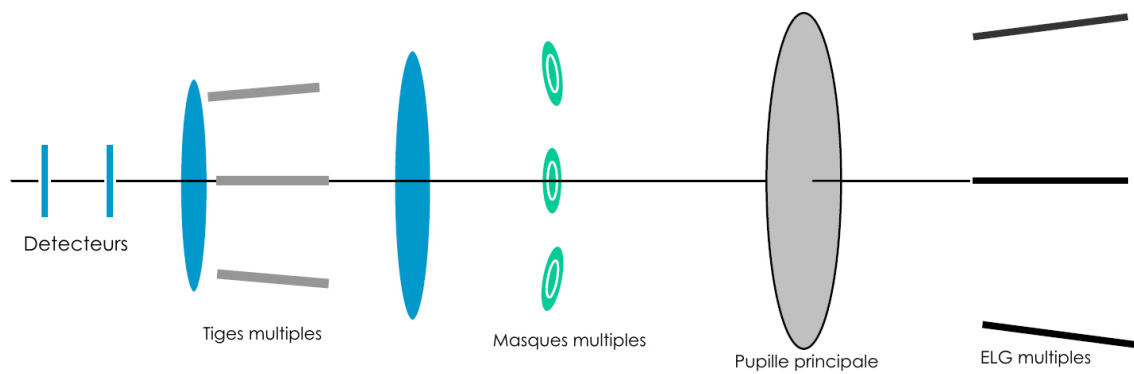


FIG. 3.3 – Pour n ELG, il faut n montages de PIGS.

3.2 Four à sodium

Comme vu dans le chapitre 1, l'élongation est provoquée par la couche de sodium. Alors en tirant avec un laser dans un four à sodium, on pourrait créer la même élongation que dans l'atmosphère². Il faudrait donc tirer avec un laser, à la longueur d'onde d'excitation des atomes de sodium, dans le four à sodium. La diffusion créée par la désexcitation des atomes de sodium serait captée par le WFS³.

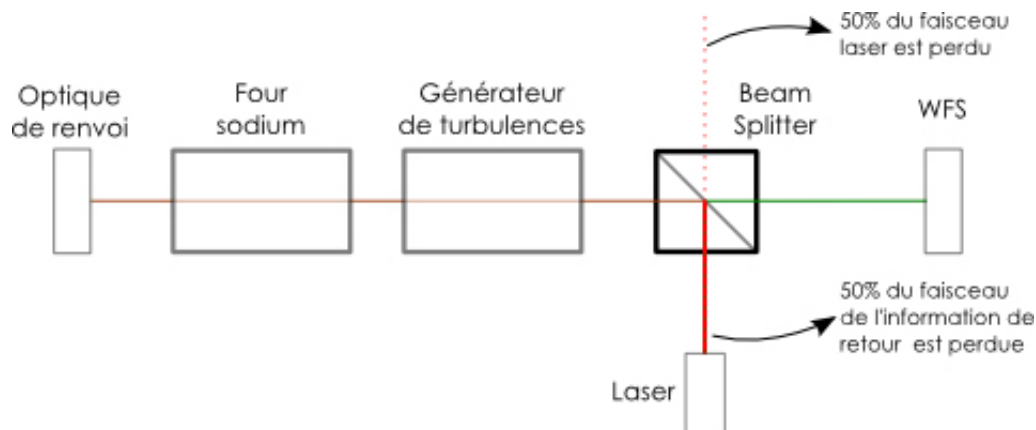


FIG. 3.4 – Schéma illustrant le concept avec le four à sodium. Les pertes d'information et d'énergie dues au beam splitter sont de 75%. Les autres pertes du système ne sont pas quantifiées.

3.2.1 Avantages

Avec un four à sodium, on peut avoir les caractéristiques réelles de la diffusion du sodium. De plus le faisceau laser peut passer à travers le générateur de turbulences lorsque l'élongation est créée et lorsque le flux de la diffusion est récupéré sur le WFS.

3.2.2 Inconvénients

Le point d'ébullition du sodium (Na) est à 883 C. Par conséquent, malgré une très bonne isolation du four, on va ajouter au système un point chaud et cela est néfaste pour les instruments optiques. En créant un déséquilibre des températures à la surface du banc, une turbulence perturbatrice est générée rendant les mesures

²L'élongation serait la même mais réduite à l'échelle du banc optique.

³Wavefront Sensor, capteur de fronts d'onde

imprécises voire fausses. Le plus dangereux est la réactivité du sodium avec l'eau. Le mélange des deux produits est explosif et donc la nécessité d'éviter le contact du Na avec l'humidité ambiante sous peine d'explosion. Avec la configuration actuelle, il est impossible de résoudre ce problème. Même en contrôlant l'humidité de l'air, la simple ouverture d'une fenêtre pourrait provoquer l'explosion du four pouvant blesser mortellement les personnes se trouvant à proximité.

3.3 Défocalisation dynamique

Si un point lumineux se déplace dans un mouvement de "va et vient" le long de l'axe optique pendant l'acquisition de la mesure du WFS, alors le point est aperçu comme une trainée lumineuse. Pour déplacer le point lumineux le long de l'axe optique, il faut changer la distance focale. On utilise la même propriété pour les *curvature wavefront sensor* — *CWFS*. Pour faire déplacer le point focal, il faut modifier la courbure d'une membrane réfléchissante ce qui est possible grâce à une onde acoustique produite par un haut-parleur et par une chambre résonante qui sert d'amplificateur.

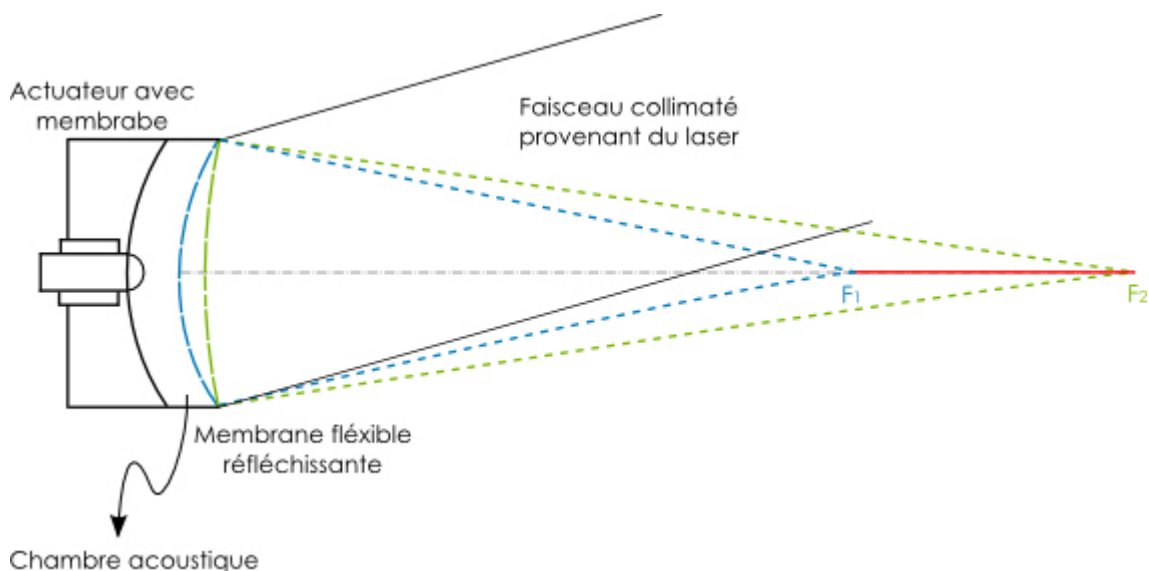


FIG. 3.5 – Schéma de principe du montage de défocalisation dynamique. Sur cette figure sont représentées les deux positions extrêmes, f_1 et f_2 du point lumineux. Au repos, le point va se trouver un milieu de f_1 et f_2

Le haut-parleur est placé dans une boîte de résonance et produit une onde acoustique de l'ordre de 2 à 4 kHz . La membrane réfléchissante se situe sur une ex-

trémité de la boîte. La raison d'une telle configuration provient de deux contraintes. La première est qu'un haut-parleur placé dans une boîte de résonance n'oscille que très peu alors que les ondes acoustiques produites ont une grande amplitude. De ce fait, celles-ci qui viennent exciter la membrane réfléchissante sont produites avec peu d'énergie. La deuxième contrainte vient du fait qu'il est très difficile d'exciter la membrane directement avec un actuateur. Celui-ci empêcherait le changement de courbure au centre de la membrane or il faut que la courbure de la membrane soit la même en tout point pour que le point focal image reste toujours sur l'axe optique.

3.3.1 Avantages

L'avantage principal de ce système est qu'on peut varier le cycle d'oscillation, tout en gardant une fréquence fixe, et ainsi obtenir un profil d'intensité qui n'est pas linéaire. Il suffit dès lors de changer la commande de l'actuateur pour obtenir d'autres profils. Le coût de ce système reste relativement faible, l'haut-parleur, la boîte de résonance et la membrane sont facilement disponibles sur le marché. La mise en place des composants ne relève aucune difficulté particulière.

3.3.2 Inconvénients

Vu que la membrane réfléchissante est excitée par des ondes acoustiques, la commande de l'actuateur n'est pas aisée. En boucle fermée, la fonction de transfert est difficile à gérer. Dans le cas de ce concept, la commande se compliquerait encore plus si on souhaite créer un profil d'intensité variable en changeant le profil de vitesse. En supposant une fréquence d'oscillation de la membrane constante, avec un rapport cyclique de 50% , ce qui sous entend une vitesse de déplacement du point constante pour un cycle complet, l'intensité de l'élongation ne sera pas constante en fonction de la position. Sur la figure 3.6 on remarque que le cône énergétique a une influence capitale sur l'intensité totale.

Pour trouver l'intensité totale, il faut faire la somme de tous les cônes énergétiques le long de l'axe optique.

A noter aussi que ce système ne permettrait pas une variation de la position de l'élongation.

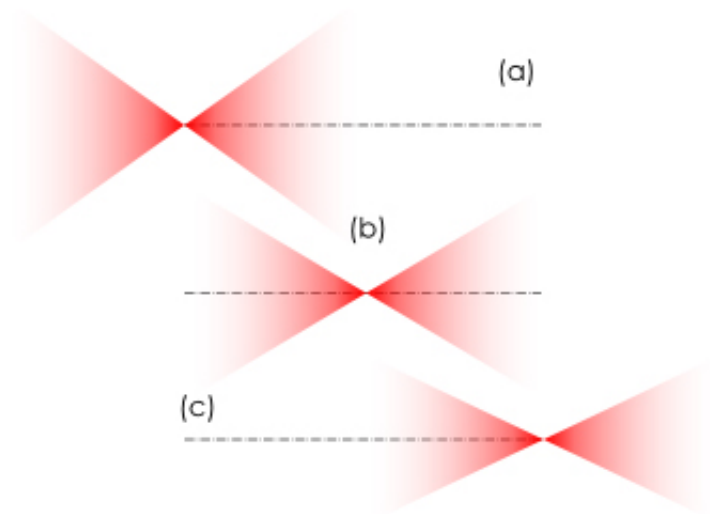


FIG. 3.6 – Dans le cas (a) seul le cône énergétique divergent à une influence sur l'intensité de l'élongation, contrairement au cas (c) où seulement le cône énergétique convergent contribue à l'intensité. Dans le cas (b) autant le cône énergétique convergent que divergent influencent l'intensité totale de l'élongation



FIG. 3.7 – Allure de la somme de l'intensité générée par un flux conique.

3.3.3 Exemple d'un profil cyclique

D'après les résultats obtenus dans la modélisation numérique (chapitre 2), l'intensité est plus forte au centre de l'élongation et diminue vers les bords. Pour cet exemple, on va supposer une telle concentration. Je vais juste montrer l'allure des profils, aucun calcul exact ne sera effectué. Les profils de vitesse pour obtenir une telle concentration sont montrés dans la figure 3.8

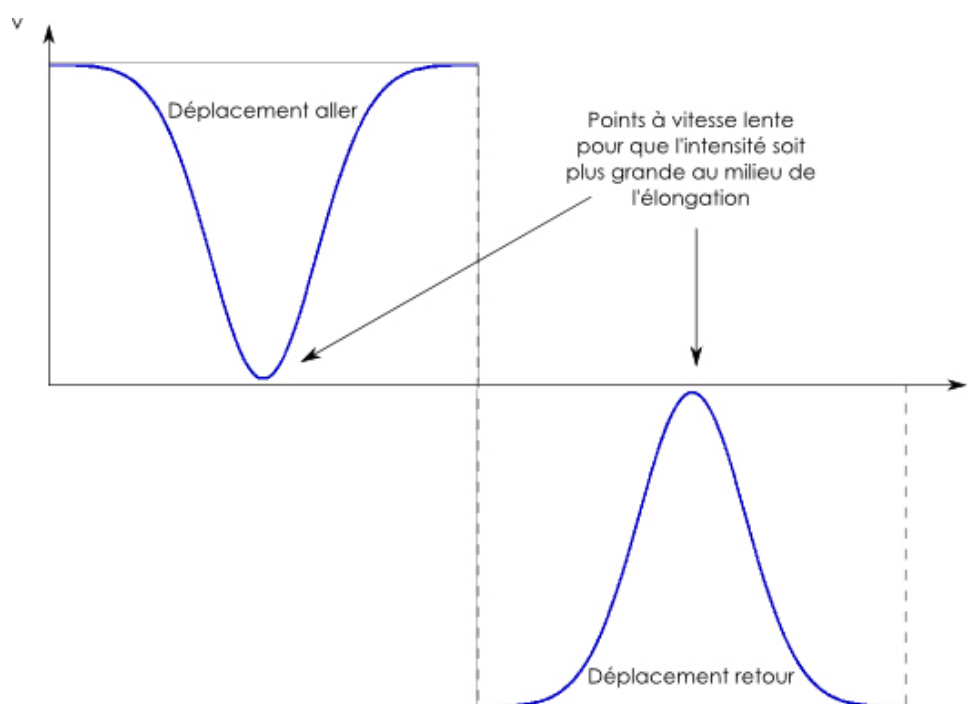


FIG. 3.8 – Profil de vitesse pour obtenir une plus forte intensité au centre que sur les bords.

On remarque aisément que la valeur absolue des surfaces sous les courbes bleues sont les mêmes ce qui indique que le point lumineux est revenu à la position initiale. Les problèmes se posent pour le profil d'accélération. En effet, l'accélération est la dérivée de la vitesse et dans le cas présent, le profil de vitesse contient 3 sauts. Cela impose à l'accélération des pointes à l'infini. Même si les inerties en jeu sont très petites, en pratique c'est très difficile, voire même impossible d'appliquer une telle consigne sur la membrane.

La commande du haut-parleur est une consigne en courant, vu que l'accélération est proportionnelle au courant. Les limitations pour obtenir une accélération infinie sont de 3 ordres :

- impossible de fournir un courant infiniment grand au haut-parleur, même si c'est pendant un intervalle de temps très court ;

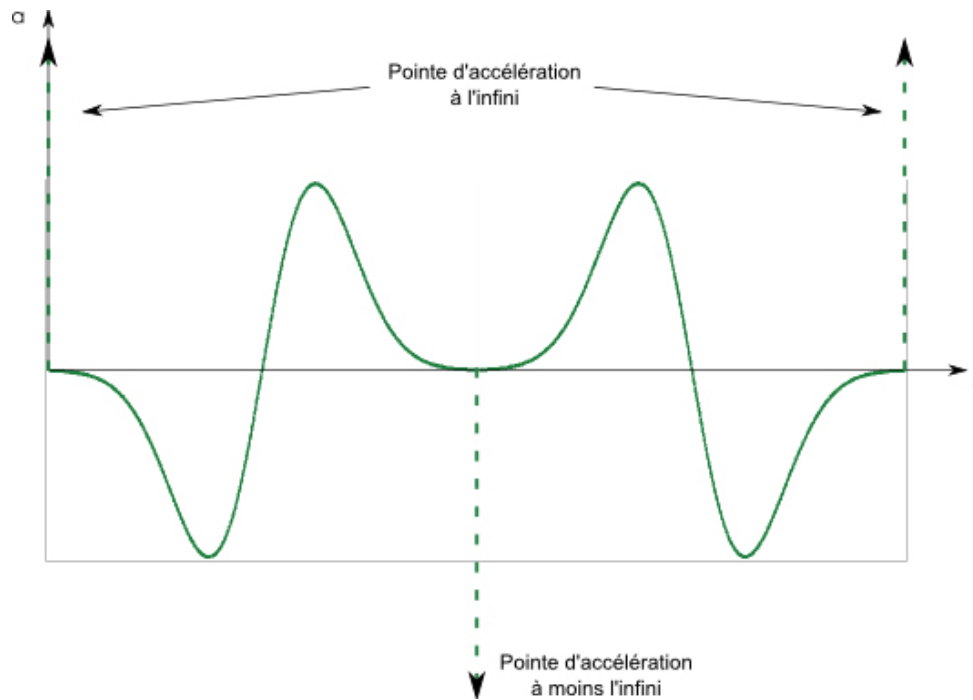


FIG. 3.9 – Profil d'accélération calculé d'après le profil de vitesse voulu. Les pointes d'accélération se trouvent à chaque changement de direction du point lumineux.

- les constantes de temps électriques et mécaniques de la bobine vont limiter l'accélération ;
- l'onde acoustique générée par le haut-parleur se déplace dans l'air qui est un milieu très élastique.

Pour éviter le problème des pointes d'accélération à l'infini, on peut contourner le problème de deux manières. La première serait d'imposer un profil de vitesse sinusoïdale (le profil d'accélération aurait la même fonction avec un décalage de $\pi/2$), et de faire varier l'intensité du laser en fonction de la position. Ainsi, il serait possible d'obtenir tous les profils d'intensité voulus avec une commande du haut-parleur souple et régulière. La deuxième manière, serait de faire varier le profil de vitesse, comme dans l'exemple décrit dans la section 3.3.3, mais d'utiliser les deux extrémités de l'élongation pour donner les vitesses initiales au point lumineux. L'inconvénient de cette méthode serait qu'il faudrait masquer les extrémités de l'élongation pour éviter que le WFS reçoive un profil intensité qui ne correspond pas au profil désiré.

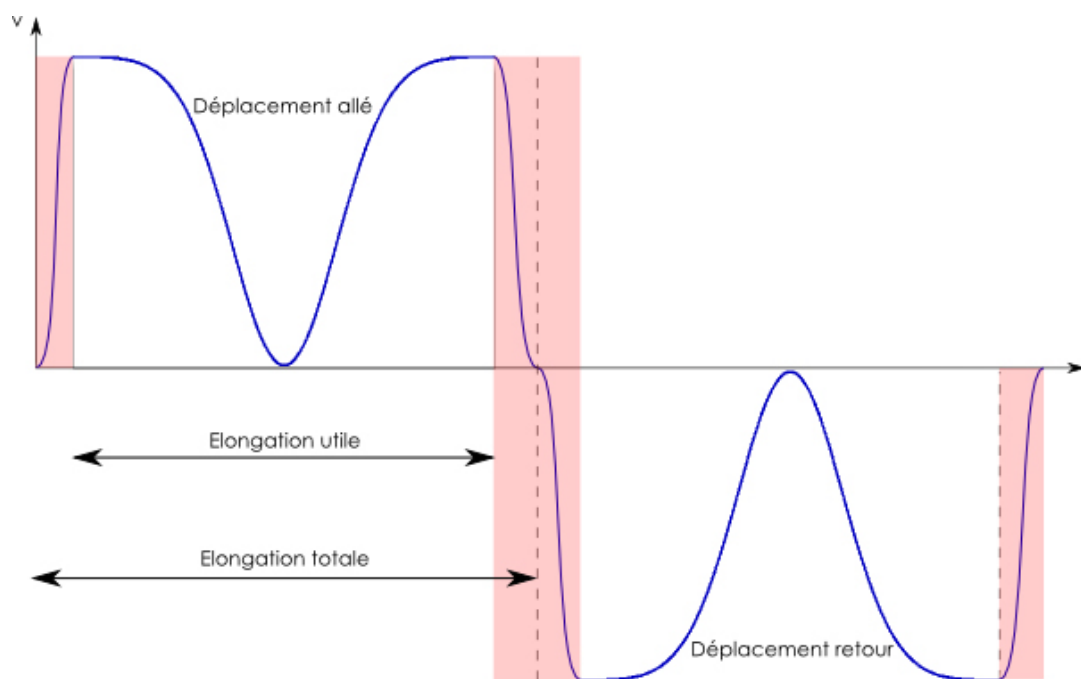


FIG. 3.10 – Les zones représentées par des bandes rouges sont interdites pour la projection sur le WFS. Les courbes bleues dans les zones rouges donnent un exemple de profil de vitesse pour éviter les sauts de vitesse.

3.4 Holographie

Un hologramme permet d'obtenir une image virtuelle à partir d'un faisceau de lumière blanche ou un faisceau cohérent à une longueur d'onde bien définie. Ainsi en faisant passer un faisceau laser à travers d'un hologramme on obtiendrait l'élongation. On peut utiliser deux sortes d'hologrammes qui ont chacun une méthode de reproduction de l'élongation bien distincte décrite dans les sections suivantes.

3.4.1 Hologramme statique

Une fois l'hologramme statique enregistré, il n'est plus possible de changer sa forme. Il est possible d'enregistrer un hologramme qui conjugue un point du plan de l'hologramme à une distance r de l'axe optique en un point à une distance d de l'hologramme sur l'axe optique coté image. La figure 3.11 permet de mieux comprendre la précédente explication.

De cette façon, en plaçant un réseau de faisceaux laser contre l'hologramme et en contrôlant l'intensité de chacun, on peut alors créer l'élongation avec un certain profil d'intensité. La transformation *objet* \rightarrow *image* est expliqué en détail au chapitre

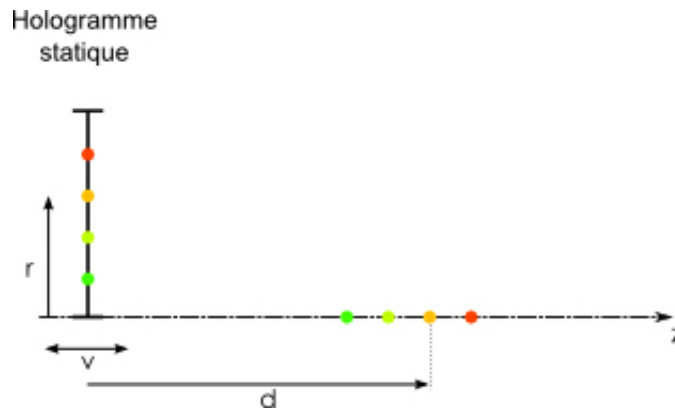


FIG. 3.11 – Principe de la création de l'élongation avec un hologramme statique.

suivant.

Avantages

L'hologramme statique permet de reproduire l'élongation avec un certain profil. C'est un système qui offre une certaine modularité car on pourrait imaginer un autre hologramme avec les mêmes caractéristiques mais qui serait divisé en n parties égales pour créer n EGL.

Inconvénients

Ce système nécessite de plusieurs lasers ou de diodes laser et il faudrait trouver un compromis entre espace occupé et résolution du réseau de lasers. La variation de la position de l'élongation n'est possible que par la variation de la position de l'hologramme

3.4.2 Hologramme dynamique

L'hologramme dynamique peut, quant à lui, changer sa forme au cours du temps. Le volume obtenu par un hologramme dynamique, soit un *Spatial Light Modulator* (SLM^4) est programmé par ordinateur et peut être modifié au cours de la expérience. Le SLM est constitué de cristaux liquides qui permet d'obtenir n'importe quelle image virtuelle à partir du faisceau laser incident.

⁴Modulateur de lumière spatial

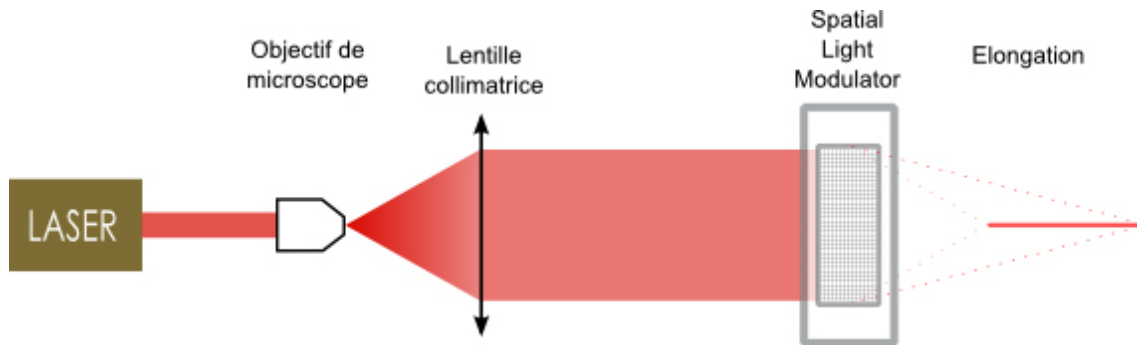


FIG. 3.12 – Schéma simplifié pour produire l'élongation avec un SLM et un laser.

Avantages

L'avantage de ce système est une importante flexibilité par rapport aux demandes exigées. On peut simuler toutes les conditions voulues décrites dans le début de ce chapitre, à savoir, formation d'une élongation lumineuse, profil d'intensité variable et déplacement de la position de l'élongation. De plus le SLM n'est pas encombrant, il est d'une taille comparable à un miroir déformable.

Inconvénients

Le prix très élevé du SLM est un facteur défavorable voire même fatal car celui-ci varie de 4'400\$ à 17'990\$ suivant le modèle choisi.

3.5 Fibre optique dénudée

Il existe plusieurs sortes de fibres optiques qui utilisent différentes propriétés physiques pour le transport de la lumière. Pour le cas étudié dans cette section, je vais me référer à la fibre optique à saut d'indice. Sur la figure 3.13 est faite la description de la coupe de la fibre.

Si la fibre optique ne possède plus la gaine de protection sur une certaine distance, la lumière transportée de la fibre diffuserait sur l'extérieur et ainsi une élongation optique serait créée. Pour enlever la gaine de protection, on attaque la fibre avec de l'acide fluorhydrique et en contrôlant la température, le temps et la concentration, la gaine serait totalement dissoute.

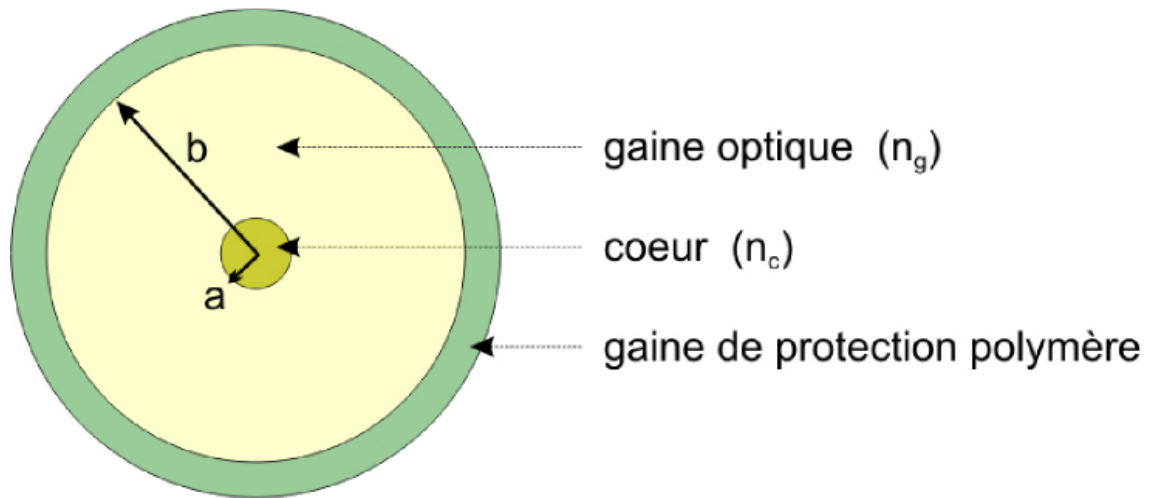


FIG. 3.13 – Coupe d'une fibre optique montrant les différentes régions la composant : cœur, gaine optique et gaine de protection.

3.5.1 Avantages

La simplicité et le faible coût sont les avantages principaux de ce système. Lors de l'attaque chimique, on peut protéger certaines zones de la fibre pour obtenir un profil d'intensité qui serait, toutefois, assez grossier. En produisant plusieurs profils sur différentes fibres, on pourrait changer de fibre en fonction du profil à simuler.

3.5.2 Inconvénients

L'attaque chimique doit être faite sous hotte aspirante. L'acide fluorhydrique est très nocif pour le corps humain. En cas de contact avec la peau, l'acide pénètre à l'intérieur et vient absorber le calcium contenu dans les os, les rendant mou. L'attaque chimique rendent la fibre trop fragile pour faire varier la position de l'élongation.

3.6 Récapitulatif

Techniques	Avantages	Inconvénients
<i>"PIGS"</i>	Montage totalement avec des instruments optiques	Simulation de n ELG, exige n montages de "PIGS" Trop de pertes optiques Complexité de mise en oeuvre Changement du profil d'intensité difficile
<i>Four sodium</i>	Comportement réel du sodium	Encombrement Point chaud dans le système Risque d'explosion Pas de profil d'intensité ni de variation de la couche Na
<i>Défocalisation dynamique</i>	Coût relativement faible Profil d'intensité non linéaire	Commande complexe Utilisation d'un masque avec profil de vitesse non sinusoïdal
<i>Hologramme statique</i>	Profil d'intensité variable Simulation de la variation de la couche de sodium	Forte limitation de la résolution Encombrement du réseau de lasers
<i>SLM</i>	Profil d'intensité variable Facilité de plusieurs ELG Simulation de la variation de la couche de sodium	Prix très élevé
<i>Fibre optique dénudée</i>	Simple à réaliser Faible coût Profil d'intensité (grossier)	Trop simpliste pour reproduire la réalité Faiblesse de la fibre après l'attaque chimique Obturation du faisceau dû à la fixation de la fibre

3.7 Conclusions

De toutes les méthodes étudiées dans les sections précédentes seule celle qui utilise le SLM permet une plus grande souplesse des caractéristiques à simuler. De plus, il permet de simuler plusieurs étoiles lasers, utile pour résoudre le problème dû à l'effet de cône (section 1.3). Le *Spatial Light Modulator* n'est pas encombrant, d'une part de sa petite taille et d'autre part la commande est décentralisée.

Dans le chapitre suivant, je vais mener une étude plus approfondie sur l'holographie, comment calculer le masque holographique, les écrans de phases et d'intensités, calculer la commande qui doit être appliquée au SLM pour produire l'élongation, dimensionner les autres composants qui entrent dans la chaîne de production de l'élongation et donner un coût approximatif total du prototype.

Chapitre 4

Procédure de mise en oeuvre

L'élaboration de l'élongation en laboratoire impose certaines contraintes. Il faut faire une mise à l'échelle de tout le système, déterminer les dimensions maximales en fonction de la place disponible sur le banc optique. Une autre étape importante est le flux énergétique émis par l'élongation. Si le flux arrivant sur le CCD est trop faible par rapport à sa sensibilité, le temps d'exposition peut devenir trop long pour l'application donnée et limiter les performances ainsi que l'utilisation. La méthode utilisée demande de créer une élongation en trois dimensions et on souhaite avoir un profil d'intensité variable le long de l'élongation ainsi qu'une variation de la position de l'élongation. Afin de connaître la commande à appliquer au SLM pour obtenir ces caractéristiques, il faut faire une étude de faisabilité pour se certifier qu'en pratique on peut réellement obtenir l'élongation en 3D.

4.1 Mise à l'échelle

La mise à l'échelle du système doit être en fonction de la taille disponible sur le banc. Le rapport de mise en réduction va donc être déterminé par les deux plus grandes distances. La distance disponible sur le banc est de $2.2m$, le rapport vaut donc;

$$Q = \frac{R}{r} = \frac{90'000}{2.2} = 40'910[-] \quad (4.1)$$

Le rapport Q doit être appliqué à toutes les grandeurs du système. Ainsi tout le système ramené à l'échelle réduite prend les dimensions suivantes;

- Distance $R = 90'000m \rightarrow R_Q = 2'200mm$
- Diamètre pupille $D = 30m \rightarrow D_Q = 0.37mm$
- Elongation $l = 10'000m \rightarrow l_Q = 244.4mm$
- Diamètre de l'élongation $r_2 = 0.159m \rightarrow r_{2Q} = 3.9\mu m$

La taille à l'échelle réduite d'une lenslet est très important pour la suite de l'étude. Comme vu précédemment, la taille réelle, conjuguée sur le télescope, dépend du nombre de lenslet du WFS ainsi que du diamètre de la pupille. Dans le cas présent, le WFS ne possède plus 16x16 lenslet mais 60x60. Le diamètre d'une lenslet vaut alors :

$$d = \frac{D}{m} = \frac{30}{60} = 0.5m \quad (4.2)$$

A échelle réduite, le diamètre de la lenslet vaut :

$$d_Q = \frac{d}{Q} = \frac{0.5}{40'910} = 12.2\mu m \quad (4.3)$$

Dans la figure suivante, on peut voir tout le système réduit à la taille du banc optique.

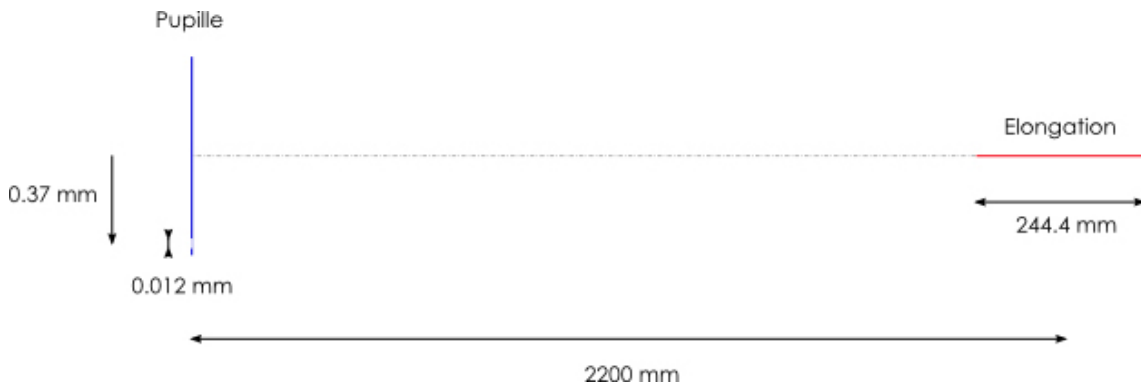


FIG. 4.1 – Mise à l'échelle de la pupille du télescope et de l'EGL

Le diamètre d_Q est vraiment petit. En pratique, on mettra une lentille convergente juste après le passage pour limiter au maximum la diffraction due à un trou d'une aussi faible diamètre, ce qui rendrait totalement fausses les mesures. Dans la prochaine section, je présente les calcul de radiométrie pour s'assurer que le flux passant dans d_Q est suffisant pour que le CCD fournisse une image.

4.2 Flux généré par l'hologramme

Le flux énergétique est très important pour l'application. La caméra CCD a une certaine sensibilité au flux récepteur et nous devons être sûr que ce flux est suffisant pour qu'on obtienne le déplacement du spot.

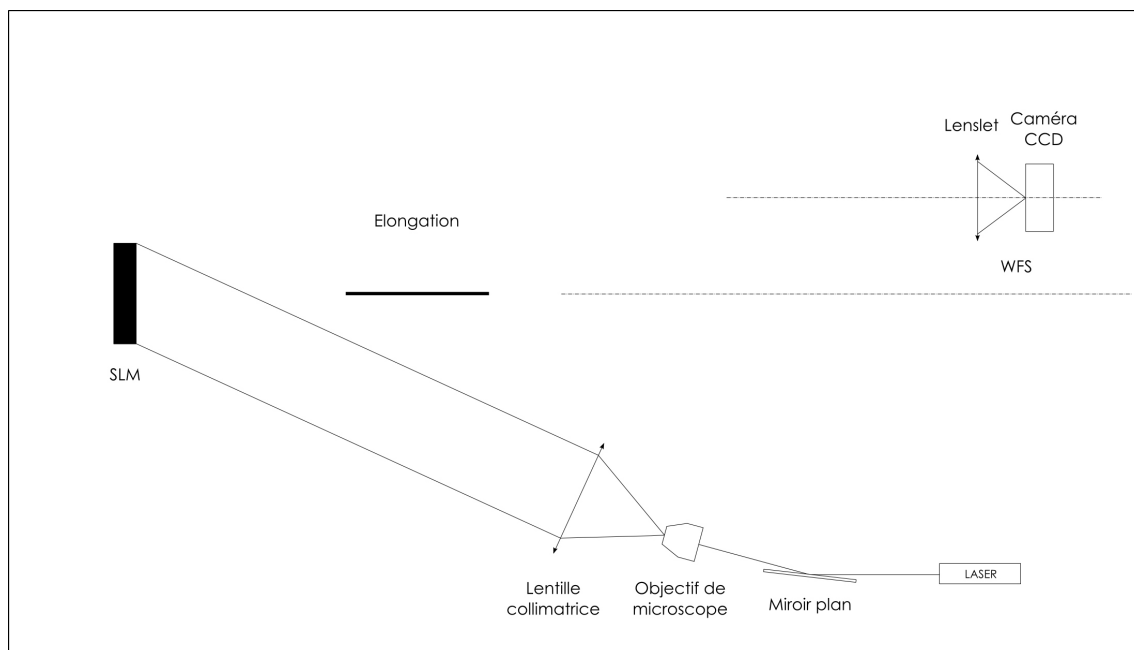


FIG. 4.2 – Schéma de principe du montage avec SLM. Les proportions et les échelles ne sont pas gardés !

La puissance maximale que peut recevoir le SLM est $P_{max} = 2W/cm^2$. Le faisceau laser va éclairer 75% de l'hauteur du SLM. Ainsi la surface éclairée par le laser est :

$$A_{SLM} = \frac{\pi \cdot (0.75 \cdot l_{SLM})^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.75 \cdot 8.64 \cdot 10^{-3})^2}{4} \cong 33 \cdot 10^{-6}m$$

La puissance maximale du laser vaut donc :

$$P_L = P_{max} \cdot A_{SLM} = 659.58mW$$

Le faisceau arrivant sur le SLM est réfléchi d'une certaine manière pour faire l'élongation. Cependant, la totalité du flux n'est pas accumulée sur l'élongation. En effet, on va obtenir des images à plusieurs ordres. Plus l'ordre est élevé, moins on aura de flux. L'hypothèse que je fais c'est que la totalité du flux est concentré sur les 2 premiers ordres et que le flux est équitablement divisé entre les trois élongations

créées (l'ordre 0 crée une élongation tant dis que l'ordre 1 en crée deux).

$$P_E = \frac{1}{3} \cdot P_L = 219.86mW$$

La source (élongation) diffuse dans toutes les directions de manière uniforme et pour simplifier le calcul d'intensité, on suppose que le flux est issu d'une source ponctuelle au centre de l'élongation. La loi de l'éclairement générale est :

$$E = \frac{I_e \cdot \cos(\theta)}{d^2} \quad (4.4)$$

En se basant sur la figure 4.1,

$$\theta = \arctan\left(\frac{0.36 \cdot 10^{-3}}{2.2}\right) = 9.36 \cdot 10^{-3}$$

L'intensité I_e pour une source diffusante dans tout l'espace est définie par :

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{dP_E}{d\Omega} = \frac{219.86 \cdot 10^{-3}}{4\pi} = 17.5mW/sr \\ \Rightarrow E &= \frac{17.5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(9.36 \cdot 10^{-3})}{2.2^2} = 3.6mW/m^2 \end{aligned}$$

Flux traversant la lenslet du WFS :

$$\begin{aligned} F_W &= E \cdot A_W \quad (4.5) \\ A_W &= \pi \frac{d_Q^2}{4} = \frac{12.2 \cdot 10^{-6}}{4} = 122.72\mu m^2 \\ \rightarrow F_W &= 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 122.72 \cdot 10^{-12} = 443,61 \cdot 10^{-15}W \end{aligned}$$

La sensibilité de la caméra qui va être utilisée (datasheet en annexe) vaut :

$S = 11.2DN/(nJ/cm^2)$ L'unité DN correspond à des niveaux logiques. La caméra possède 256 niveaux, il faut donc $N_{max}[nJ/cm^2]$ pour la saturer.

$$N_{max} = \frac{256}{11.2} = 22.86nJ/cm^2$$

Mais pour notre application et pour laisser un peu de marge avant la saturation, on va se limiter à un maximum de 200 niveaux. Pour les atteindre il nous faut cette fois-ci

$$N = \frac{N_{max} \cdot 200}{256} = 17.86nJ/cm^2$$

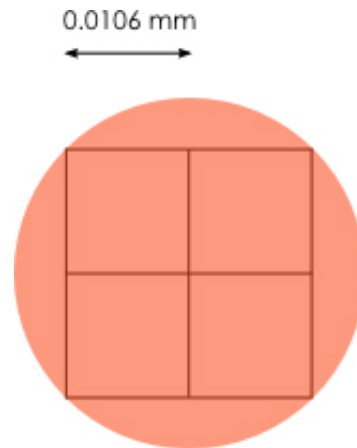


FIG. 4.3 – Hypothèse de travail de l'illumination des pixels.

Le spot va être focalisé sur un certain nombre de pixels en fonction de son diamètre. On suppose que 4 de pixels illuminés par le spot, comme le montre la figure 4.3.

La surface des quatre pixels vaut :

$$A_p = (21.2 \cdot 10^{-6})^2 = 466 \cdot 10^{-12} m^2$$

L'énergie qui peut donc être reçue sur les quatre pixels pour atteindre les 200 niveaux peut s'écrire :

$$E_p = N \cdot A_p \quad (4.6)$$

$$E_p = 17.86 \cdot 10^{-5} \cdot 466 \cdot 10^{-12} = 83.31 \cdot 10^{-15} J$$

L'énergie peut aussi être définie par le produit d'un flux par le temps d'exposition.

$$E = F \cdot t \quad (4.7)$$

En se basant sur la formule précédente, on peut trouver le temps d'exposition pour notre application.

$$t = \frac{E_p}{F_W} = \frac{83.31 \cdot 10^{-15}}{443,61 \cdot 10^{-15}} = 187.8 ms$$

Le temps d'exposition est cohérent et on ne doit pas prendre de mesure particulière sur ce paramètre. Cependant, si on veut produire des profils d'intensité de l'élongation variables au cours du temps, il faut qu'ils soient plus lent que 187.8ms.

4.3 Etude de faisabilité d'un hologramme 3D avec SLM

L'étude de faisabilité de l'utilisation de SLM pour créer l'hologramme en trois dimensions a été écarté des principes de base car, d'après *Kyoji Matsushima* la création de plan cachés par d'autres plan est difficilement gérable. De plus, le SLM choisi pour le prototype ne permet pas de créer des hologrammes en trois dimensions.

4.4 Utilisation du SLM en lentille $f(r)$

L'impossibilité de créer un hologramme en trois dimensions nous oblige à nous pencher sur une autre façon d'utiliser l'hologramme. Supposons une lentille avec un rayon de courbure variable en fonction de son rayon radial, alors le plan focal est aussi variable. Ainsi, lorsqu'on projète un faisceau collimaté sur la lentille on obtient l'élongation lumineuse. Le SLM permet de faire la même opération en encodant la phase sur les pixels. Sur la totalité du diamètre on fait varier la phase de 0 à 2π ainsi on ne crée pas d'images parasites. Avant de commencer à calculer la phase, il faut trouver l'équation qui relie la position de l'élongation en fonction du rayon du SLM. La fonction est de la forme $F(r_h) = p \cdot r_h + b$.

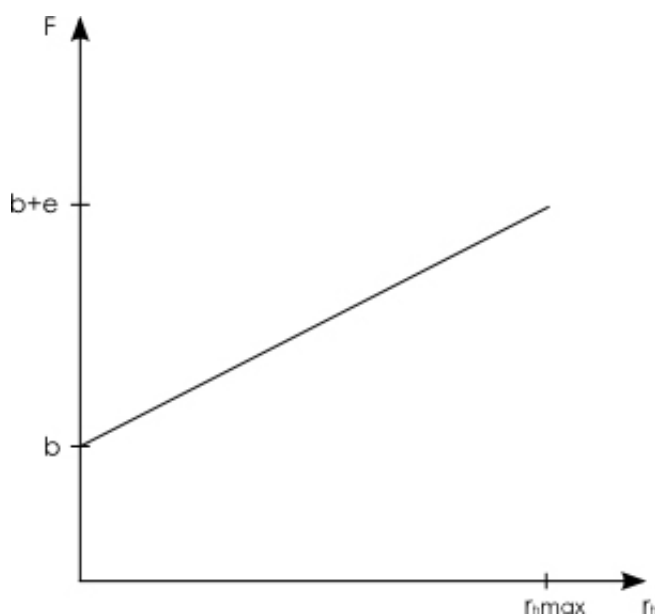


FIG. 4.4 – Relation entre la position de l'élongation et le rayon du SLM

La pente de la droite vaut :

$$p = \frac{e}{l/2} = \frac{0.244}{8.64 \cdot 10^{-3}/2} = 56.48$$

La valeur de b correspond à la position minimum pour qu'on respecte une variation de phase seulement de 2π . La phase φ est donnée par la formule suivante :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda F} \cdot \frac{r_h^2}{2} \leq 2\pi \quad (4.8)$$

En résolvant l'inéquation, avec une longueur d'onde de $633nm$, on trouve :

$$F \geq 14.74m$$

On trouve finalement l'équation :

$$F(r_h) = 56.48 \cdot r_h + 14.74 \quad (4.9)$$

Avec la formule 4.8 on peut calculer la phase pour tout le rayon r_h . Le résultat affiché sur la figure 4.5 montre que pour rayon proche de l'axe optique, la phase est faible, alors que pour un rayon éloigné de l'axe optique, la phase est plus grande pour réfléchir le rayon lumineux sur l'axe optique.

L'élongation est discrétisée et possède un nombre de points limités par la résolution du SLM. Vu que chaque point de l'élongation est créé par un rayon différent, l'énergie de chaque point est alors différente. Pour imposer une élongation uniforme, il faut que le produit *Amplitude · Surface* soit toujours constant. La PSF de chaque point de l'élongation est très important, l'intensité et l'allure de l'élongation sont directement liés. La PSF est donné par la formule suivante :

$$PSF = \left[\frac{2 \cdot J_1(\pi \cdot r_h \cdot a_0)}{\pi \cdot r_h \cdot a_0} - \frac{2 \cdot J_1(\pi \cdot r_h \cdot a_0 \cdot r_i)}{\pi \cdot r_h \cdot a_0 \cdot r_i} \right]^2 \quad (4.10)$$

$$a_0 = \frac{r_h}{\lambda F}$$

$$r_i = \frac{r_{hi}}{r_{hi-1}}$$

Cette figure montre l'évolution de la PSF en fonction de l'élongation. En début d'élongatio les valeurs de la PSF sont grandes alors que plus on avance, plus la PSF diminue. Ceci est dû à la variation des diamètres pour chaque point. L'échantillonnage du SLM est aussi un point critique du projet. La fabricant *Holoeye* propose

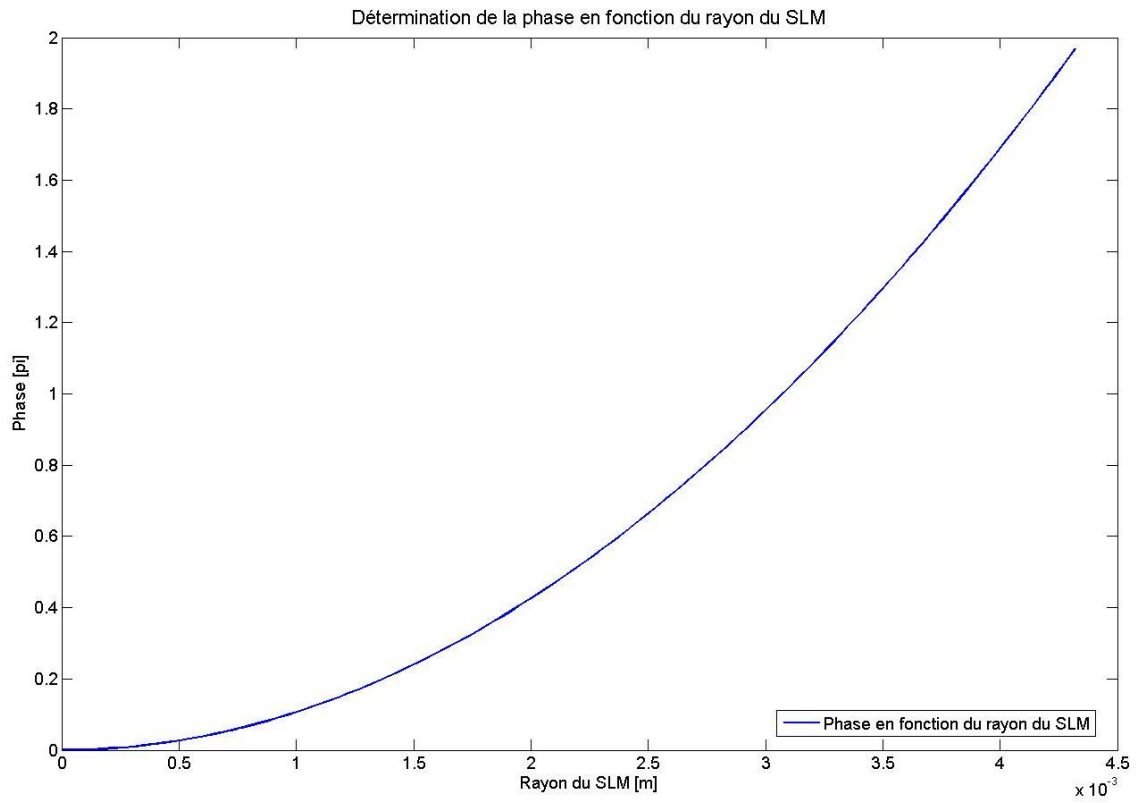


FIG. 4.5 – Phase φ en fonction du rayon du SLM r_h

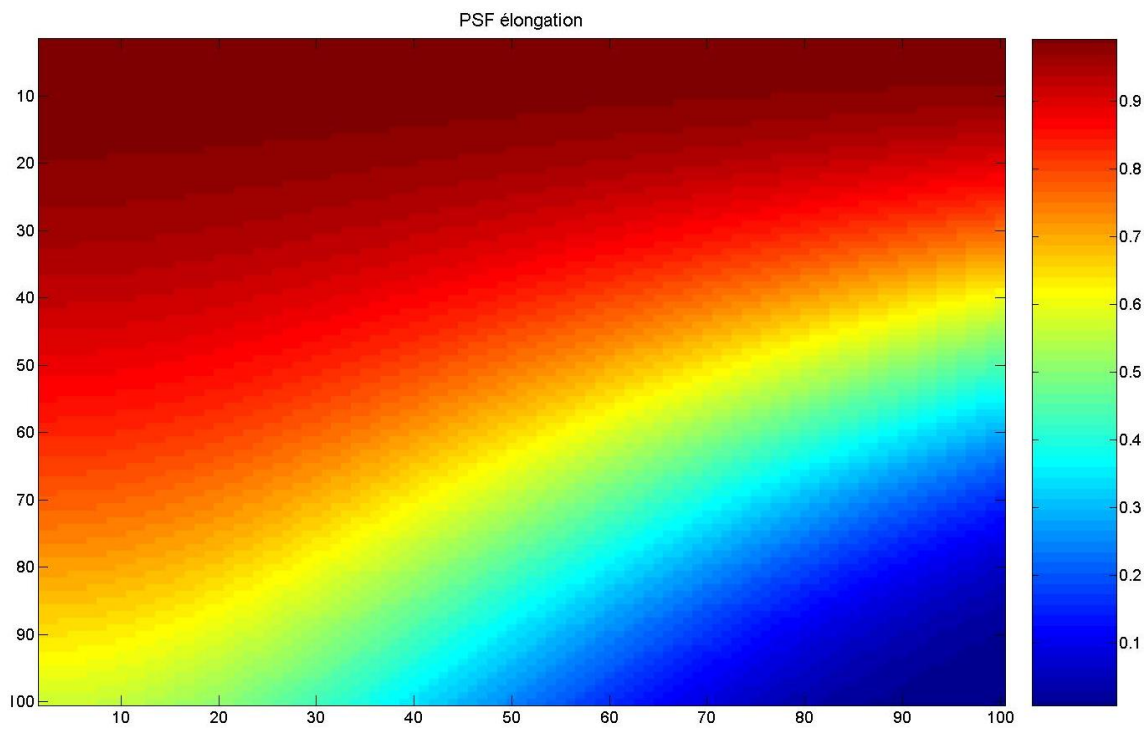


FIG. 4.6 – PSF de l'élongation

Echantillonnage du diamètre de SLM en fonction du nombre de points d'élongation

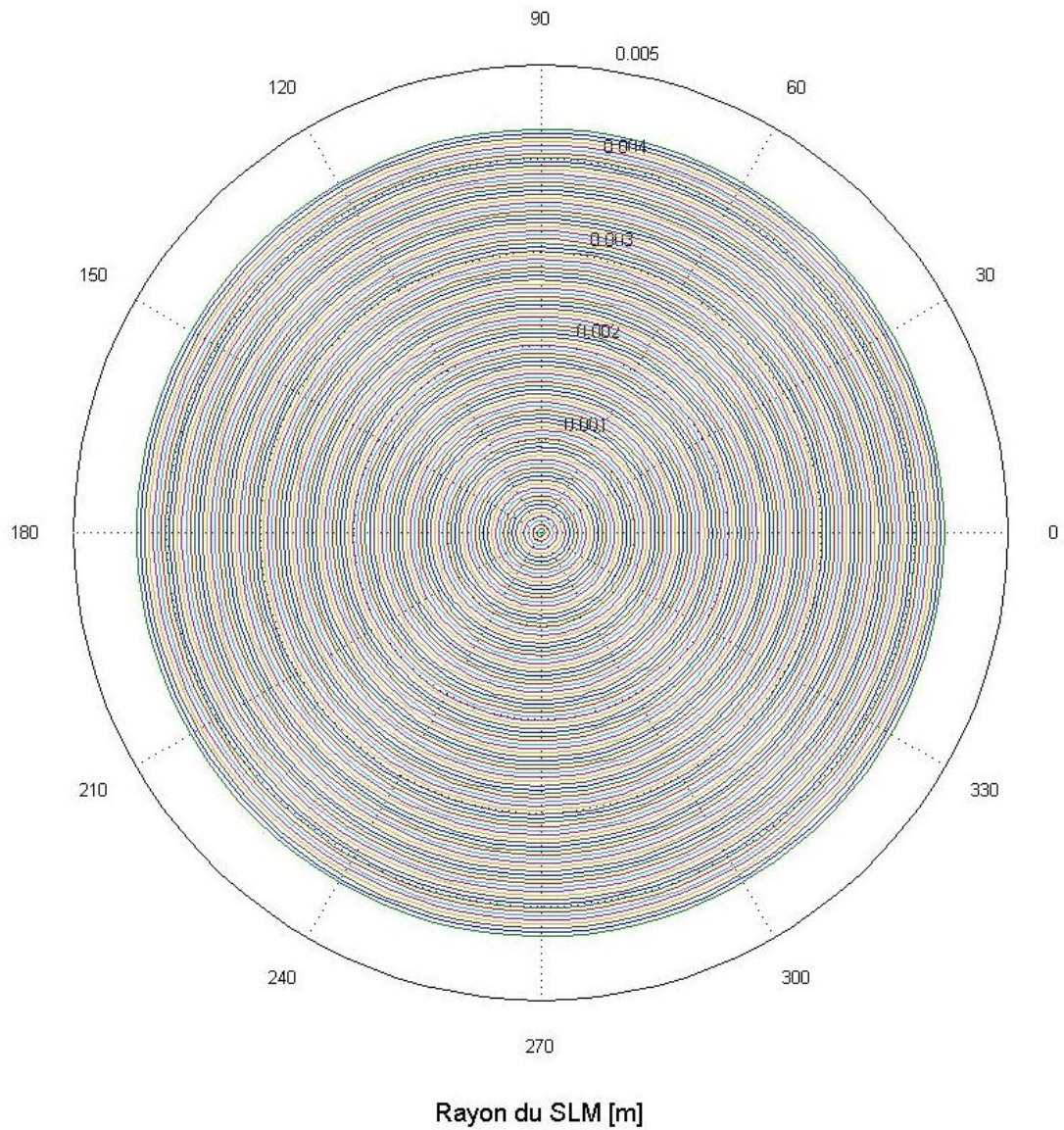


FIG. 4.7 – Echantillonnage sur le SLM pour une élongation comportant 100 points.

un modèle avec une résolution de 1920x1200. En prenant 100 échantillons, comme le montre la figure 4.6, on a alors 6 pixels pour créer un point de l'élongation.

Avec cette méthode on peut créer l'élongation le long de l'axe optique et on peut faire varier son profil d'intensité ainsi que la déplacer le long de l'axe. L'objectif principal est atteint, même si nous ne pouvons pas obtenir un comportement similaire à la vrai élongation de l'étoile guide laser. Le fait que l'élongation va se créer à quelques $14m$, impose une optique pour ramener l'élongation à des distances raisonnables pour le banc optique. L'étude de l'optique de rapprochement de l'élongation n'a pas été faite car cela a été considéré comme tâche non prioritaire pour la réalisation du prototype.

Conclusion

L'étoile guide laser permet une nette augmentation de la couverture du ciel cependant les limitations qu'elle engendre ne peuvent pas être négligée. Des solutions ont déjà été proposées pour résoudre l'effet de cône et pour mesurer le tip-tilt de l'atmosphère. Le problème dû à l'élongation de l'EGL reste un défi pour les chercheurs.

La modélisation numérique a apporté des résultats identiques que les mesures qui ont déjà été faites de l'EGL. Mais le manque du modèle sur les turbulances atmosphériques, autant à l'allé qu'au retour de la lumière, rend la simulation assez pauvre en informations. Le but de l'étude n'était pas non plus de faire une simulation la plus proche possible de la réalité. La simulation devrait subir une mise à jour pour que le temps de calcul soit plus rapide.

Les solutions qui ont été analysées produisent toutes l'élongation mais avec des limitations. Ces limitations peuvent venir du faite de la qualité de reproduction (la réalité n'est pas reproduite dans son intégralité) ou alors le système est trop complexe ou dangereux à mettre en oeuvre.

L'utilisation du *Spatial Light Modulator* semble être le moyen le plus simple et celui qui permet une meilleure adaptation aux exigences voulues. Cependant, le SLM a été très décevant une fois qu'on a procédé à son étude plus approfondie. La formation d'image en trois dimensions n'est pas possible avec le SLM que nous avons choisis. De plus, le document de *Kyoji Matsushima* (en annexe) explique à quel point il est

difficile de mettre en oeuvre des plans images qui seraient cachés les uns derrière les autres.

Finalement, avec la solution proposée, on perd la possibilité d'imposer un profil d'intensité en fonction de r_n , mais le profil d'intensité le long de l'élongation ainsi que le déplacement total de l'élongation sont toujours possibles.

Victoria BC, le 19 décembre 2006

Bruno Duarte

Annexe A

Bibliographie

- Methods for correcting tilt anisoplanatism in laser-guide-star-based multiconjugate adaptive optics, Brent L. Ellerbroek and François Rigaut, Gemini Observatory, 670 North A'ohoku Place, Hilo, Hawaii 96720
- Focus anisoplanatism effects on tip-tilt compensation for adaptive optics with use of a sodium laser beacon as a tracking reference, S. Esposito and A. Riccardi Arcetri Astrophysical Observatory, Largo E. Fermi 5, I-50125 Firenze, Italy
- Feasibility of adaptive telescope with laser probe, R. Foy and A. Labeyrie, Observatoire du Caenn, Caussols, F-06460 st. Vallier de Thiey, France
- Laser guide star for 3.6- and 8-m telescopes : performance and astrophysical implications, M. Le Louarn, R. Foy, N. Hubin and M. Tallon, ESO-European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild-Straße 2, Garching bei München, D-85748 Germany
- Uniform versus Gaussian beams : a comparison of the effects of diffraction, obscuration, and aberrations, Virendra N. Mahajan, The Aerospace Corporation, P. O. Box 92957, Los Angeles, California
- A laser beacon for monitoring the mesospheric sodium layer at La Palma, L. Michaille, A. D. Canals, J. C. Dainty, J. Maxwell, T. Gregory, J. C. Quartel, F. C. Reavell, R. W. Wilson and N. J. Wooder
- PIGS on Sky - Dream or Reality ? S. Kellner, R. Ragazzoni, W. Gässler, E.

- Diolaitic, J. Farinato, C. Adriaconod, R. Meyerse, T. Morrise, A. Ghedinaf
- Laser guide star in adaptative optics : the tilt determination problem, F. Rigaut and E. Gendron, Observatoire de Paris et Université de Paris, France
 - Adaptive optics with four laser guide stars : correction of the cone effect in large telescopes, Elise Viard, Miska, Le Louarn, and Norbert Hubin
 - Spot size, depth-of-focus, and diffraction ring intensity formulas for truncated Gaussian beams, Hakan Urey

Annexe B

Routines Matlab

B.1 Description des routines

B.1.1 Forme d'onde

Nom du fichier : **Forme_donde.m** Cette routine permet de d'afficher la forme de l'onde gaussienne en fonction du rapport de troncation T . La routine n'a pas besoin d'aucune entrée extérieure. C'est l'utilisateur qui définit le rapport de troncation ou le diamètre d'aburation.

B.1.2 Elongation

Nom du fichier : **Elongation.m** Cette routine calcule l'intensité en fonction des paramètre d'entrée. La routine fait appel à la fonction *irradiance* créée par R. Conan. Les paramètres d'entrée sont décrits et commentés dans le script.

B.1.3 Visualisation en 3D

Nom du fichier : **Visu3D.m** Cette routine doit être exécutée juste après *Elongation* et permet de créer la figure en trois dimensions de l'intensité calculée auparavant. Aucune entrée, autre que le résultat de *Elongation*, n'est nécessaire.

B.1.4 Intensité axiale

Nom du fichier : **axialIntensity.m** La routine affiche l'évolution de entre la distance de tir R et le maximum d'intensité. Les paramètres d'entrée sont décrits et commentés dans le script.

B.1.5 Projection élongation unitaire

Nom du fichier : **Projection.m** Cette routine permet la simulation sur le WFS de la projection de l'élongation lumineuse unitaire le long de l'axe optique. L'exécution du script ne nécessite d'aucune entrée extérieure et les paramètres y sont décrits et commentés.

B.1.6 Projection de la figure d'intensité

Nom du fichier : **Projec_final2.m** Cette routine fait appel à deux fonctions. La fonction *intensité* (Nom du fichier : **Intensite.m**) permet le calcul de l'intensité pour un point donné et la fonction *data_org* (Nom du fichier : **data_org.m**) calcul la projection de l'élongation et trie toutes les données. L'exécution du script principal ne nécessite que la définition des paramètres qui y sont décrits. Le résultat final est sauvegardé dans un fichier qui s'appelle *Intens_tot* et contient la matrice *result*. Cette matrice a trois dimensions. La première (lignes) correspond au nombre d'échantillons utilisés dans la simulation. La deuxième dimension à trois colonnes. La première colonne contient la valeur de l'intensité, la deuxième les valeurs de x et la troisième les valeurs de y . La troisième dimension de la matrice *result* correspond aux lentilles.

B.1.7 PSF de l'élongation

Nom du fichier : **param_holo.m** Cette routine calcule et affiche la PSF de l'élongation sur le banc optique. Les paramètres d'entrée sont décrits et commentés dans le script.

B.2 Listing des routines

B.2.1 Forme d'onde

```
0 % Rayon dde la pupille (troncation)
  a = 0.5;    %[m];

  % Rapport de troncation du faisceau gaussien
  T1 = 0.1;
5 T2 = 0.4;
  T3 = 0.9;
  T4 = 10;
```

```

% Rayon du faisceau
10 wm1 = T1*a; %[m]
    wm2 = T2*a; %[m]
    wm3 = T3*a; %[m]
    wm4 = T4*a; %[m]
    % wm = linspace(0,100,1000);

15 % Distance radiale de l'axe optique
    nrn = 1001;
    r = linspace(-.5,.5,nrn);

20 % Forme de l'onde progressive
    U1 = (2./pi).^(1./2).*1./wm1.*exp(-r.^2./wm1.^2);
    U2 = (2./pi).^(1./2).*1./wm2.*exp(-r.^2./wm2.^2);
    U3 = (2./pi).^(1./2).*1./wm3.*exp(-r.^2./wm3.^2);
    U4 = (2./pi).^(1./2).*1./wm4.*exp(-r.^2./wm4.^2);

25 plot(r,U1,r,U2,r,U3,r,U4)
    grid
    legend('T = 0.1','T = 0.4','T = 0.9','T = 10')
    xlabel('Distance radiale')
30 ylabel('Amplitude du faisceau')
    title('Amplitude et forme du faisceau en fonction de r et du
        paramètre T')

```

B.2.2 Elongation

```

0 %*****
%
%           Auteur : Bruno Duarte & Rodolphe Conan      *
%
%           Projet : Simulation d'une ELG                *
%
%           Cadre : Travail de diplôme 2006             *
5 %
%           Lieu : VICTORIA BC - Canada                 *
%
%           Date : Octobre 2006                         *
10 %*****

```

```
tic
% Définition des paramètres nécessaire pour la simulation

15 % Rayon dde la pupille (troncation)
a = 0.5; % [m];

% Rayon du faisceau
wm = 0.45; % [m]

20 % Longueur d'onde
o = 589e-9; % [m]

% Rapport de troncation du faisceau gaussien
25 T = wm/a;

% Puissance du faisceau
P = 1 - exp(-2/T^2);

30 % Distance focale
R = 100e3; % [m]

% F number
F = R/(2*a);

35 % Définition des variables spaciales et d'intégration
nz=201;
nrn=201;
z = linspace(60e3,120e3,nz);
40 rn = linspace(0,1.5,nrn);

disp('Summing series...')
[R2,Z] = ndgrid(rn.*o.*F,z);
tic
45 Iseries = irradianc(R2,o,T,a,Z,R,P,1e-6);
toc

% Vérification de la formule précédente en appliquant certains cas
particuliers
% l'équation principale de Urey
50 % pour les grandes valeurs de rn
```

```

% Facteur de phase en fonction de rn
q = 0.84;
55 I_f = 4*exp(-2/T^2)./(o^2.*F^2.*pi^3.*rn.^3.*T^2.*P).*(sin(pi.*rn-q))
    .^2;

% Intensité axiale I0
60 I0 = (pi*T^2*(1-exp(-1/T^2))^2)/(2*o^2*F^2*(1-exp(-2/T^2)));

figure
semilogy(rn,I_f,'r',0,I0,'gx',rn,Iseries(:,(nz+1)/2),'k--')
legend('Fonction principale','Evaluation pour les grandes valeurs de
    rn',...
65     'Intensity axiale I0','Series');
title('Intensité sur le plan focal (z = R)')
xlabel('Distance rn [m]')
ylabel('Intensité [W/m^2]')

70 % Détermination de l'intensité axiale en fonction de la distance de
% propagation

N = a^2/o/R;
dz = R - z;
75 Iz = 2.*pi.*a.^2.*T.^2.*(coth(1./T.^2)-(cos(pi.*N.*dz./z)./sinh(1./T
    .^2)))./...
    (o.^2.*z.^2.*(1+(pi.^2.*T.^4.*N.^2.*dz.^2./(z.^2))));
toc

```

B.2.3 Irradiance

```

0 % Fonction réalisée par M. Rodolphe Conan

function out = irradiance(r,lambda,T,a,z,R,Pbeam,tolerance)

c      = 8.*pi.*(a./T./lambda./z).^2./Pbeam;
5 aa = 1/T/T + i.*pi.*( a.^2.*(1./z - 1./R)./lambda);
bb = (pi.*a.*r./z./lambda).^2;
verbose = false;

```

```

if nargin<8
tolerance = 1e-12;
10 end
nMax      = 150;
mMax      = 150;
out = c.*abs(fresnelIntegral./2).^2;

15 function out1 = fresnelIntegral
    out1 = fun(0,0);
    error = 1;
    test_l = true;
    l = 0;

20 while test_l && l<=nMax
    test_p = true;
    p = 1;
    while test_p && p<=mMax
25         test_p = addTerm(fun(l,p));
        p = p + 1;
    end
    l = l + 1;
    test_l = addTerm(fun(l,0));

30 end

function out2=fun(n,m)
    out2 = ( 1 ./ ( prod(1:n).*prod(1:m).^2 ) ).*...
        (-aa).^n.*(-bb).^m./(n+m+1);

35 end

function out3 = addTerm(term)
    out3 = true;
    if any(abs(term(:))>0)
40         error = abs(term./out1);
        if max(error(:))<=tolerance
            out3 = false;
        end
        out1 = out1+term;

45     end
    end
end
end
end

```

B.2.4 Visualisation en 3D

```

0  s = 11;

   theta = linspace(0,pi/2,s);

   [R,0,Z] = meshgrid(rn,theta,z);
5
   [Xc,Yc,Z] = pol2cart(0,R,Z);

   Ic = shiftdim(repmat(I,[1,1,s]),2);

10  % Slice at z max
   rnis = 11;
   rni = linspace(min(rn),max(rn),rnis);
   [Rs,Os,Zs] = meshgrid(rni,theta,z(end));
   Is = interp3(R,0,Z,Ic,Rs,Os,Zs);
15  [Xs,Ys,Zs] = pol2cart(Os,Rs,Zs);

   hx = mesh(squeeze(Xs),squeeze(Ys),squeeze(Zs).*1e-3,squeeze(Is))
   set(hx,'FaceColor','interp','EdgeColor','k')

20  % slice at x = 0
   zi = min(z):5e3:max(z);
   [Rs,Os,Zs] = meshgrid(rni,pi/2,zi);
   Is = interp3(R,0,Z,Ic,Rs,Os,Zs);
   [Xs,Ys,Zs] = pol2cart(Os,Rs,Zs);
25  hold
   hx = mesh(squeeze(Xs),squeeze(Ys),squeeze(Zs).*1e-3,squeeze(Is))
   set(hx,'FaceColor','interp','EdgeColor','k')

   % slice at y = 0
30  [Rs,Os,Zs] = meshgrid(rni,0,zi);
   Is = interp3(R,0,Z,Ic,Rs,Os,Zs);
   [Xs,Ys,Zs] = pol2cart(Os,Rs,Zs);
   hx = mesh(squeeze(Xs),squeeze(Ys),squeeze(Zs).*1e-3,squeeze(Is))
   set(hx,'FaceColor','interp','EdgeColor','k')
35
   % slice at z min
   theta = linspace(pi/2,2*pi,3*s);
   Ic = shiftdim(repmat(I,[1,1,3*s]),2);

```

```

[R,0,Z] = meshgrid(rn,theta,z);
40 [Rs,Os,Zs] = meshgrid(rni,theta,z(1));
Is = interp3(R,0,Z,Ic,Rs,Os,Zs);
[Xs,Ys,Zs] = pol2cart(Os,Rs,Zs);
hx = mesh(squeeze(Xs),squeeze(Ys),squeeze(Zs).*1e-3,squeeze(Is))
set(hx,'FaceColor','interp','EdgeColor','k')
45
% slice at z=90
Ic = shiftdim(repmat(I,[1,1,round(s/2)]),2);
theta = linspace(0,-pi/4,round(s/2));
[R,0,Z] = meshgrid(rn,theta,z);
50 [Rs,Os,Zs] = meshgrid(rni,theta,90e3);
Is = interp3(R,0,Z,Ic,Rs,Os,Zs);
[Xs,Ys,Zs] = pol2cart(Os,Rs,Zs);
hx = mesh(squeeze(Xs),squeeze(Ys),squeeze(Zs).*1e-3,squeeze(Is))
set(hx,'FaceColor','interp','EdgeColor','k')

```

B.2.5 Intensité axiale

```

0 % Rayon dde la pupille (troncation)
a = 0.5; % [m];

% Rapport de troncation du faisceau gaussien
T = 0.9;
5 % Rayon du faisceau
wm = T*a; % [m]

% Longueur d'onde
o = 589e-9; % [m]
10
% Puissance du faisceau
P = 1 - exp(-2/T^2);

% Distance focale
15 % R = 90e3; % [m]

% F number
% F = R/(2*a);

20 syms z R

```



```

% Fresnel number
N = a^2/o/R;

25 Iaxial = 2*pi*a^2*T^2*...
    ( coth(1/T^2) - cos(pi*N*(R-z)/z)/sinh(1/T^2) )/...
    ( o^2*z^2*( 1 + (pi*T^2*N*(R-z)/z)^2 ) );
dIaxialdz = diff(Iaxial)

30
f = @(z,R,N)2.*pi.*a.^2.*T.^2.*( coth(1./T.^2) - cos(pi.*N.*(R-z)./z)
...
./sinh(1./T.^2) )./( o.^2.*z.^2.*( 1 + (pi.*T.^2.*N.*(R-z)./z).^2
) );
dfdz = @(z,R) 4704063440315053318917690573136763755167744/...
6338232462882714894073140781525*pi*sin
    (7291964848896435/17179869184*...
35 pi/R*(R-z)/z)*(-7291964848896435/17179869184*pi/R/z-...
7291964848896435/17179869184*pi/R*(R-z)/z^2)/z^2/...
(1+13954656866273114659494995632329009/...
118059162071741130342400*pi^2/R^2*(R-z)^2/z^2)-...
66848762121410534844552708096/28631159757928225*pi*...
40 (2668327932437939/2251799813685248-140737488355328/...
221375330809909*cos(7291964848896435/17179869184*pi/R*(R-z)/z))
...
/z^3/(1+13954656866273114659494995632329009/...
118059162071741130342400*pi^2/R^2*(R-z)^2/z^2)-...
33424381060705267422276354048/28631159757928225*...
45 pi*(2668327932437939/2251799813685248-140737488355328/...
221375330809909*cos(7291964848896435/17179869184*pi/R*(R-z)/z))/z
^2/...
(1+13954656866273114659494995632329009/118059162071741130342400*
pi...
^2/R^2*(R-z)^2/z^2)^2*(-13954656866273114659494995632329009/...
59029581035870565171200*pi^2/R^2*(R-z)/z^2-...
50 13954656866273114659494995632329009/59029581035870565171200*...
pi^2/R^2*(R-z)^2/z^3)

R = linspace(90,140,41).*1e3;
zMax = zeros(size(R));
55 for k=1:length(R)

```

```

    zMax(k) = fzero(@(x)dfdZ(x,R(k)),R(k));
end
Imax = f(zMax,R,a.^2./o./R);

60 figure
subplot(3,1,1)
plot(R.*1e-3,zMax.*1e-3)
% set(gca,'xlim',[min(zMax),max(R)].*1e-3,...
%      'ylim',[min(zMax),max(R)].*1e-3)
65 grid
xlabel('Distance focale z [km]')
ylabel('z_{max} [km]')

subplot(3,1,2)
70 plot(R.*1e-3,Imax,...
    R.*1e-3,f(90e3,R,a.^2./o./R),...
    R.*1e-3,f(80e3,R,a.^2./o./R),...
    R.*1e-3,f(100e3,R,a.^2./o./R))
% set(gca,'xlim',[min(zMax),max(R)].*1e-3,...
75 %      'ylim',[min(zMax),max(R)].*1e-3)
grid
xlabel('Distance focale [km]')
ylabel('I_{max}')
legend('I_{max}','I_{90}','I_{80}','I_{100}')

80 subplot(3,1,3)
plot(R.*1e-3,f(90e3,R,a.^2./o./R)./Imax)
% set(gca,'xlim',[min(zMax),max(R)].*1e-3,...
%      'ylim',[min(zMax),max(R)].*1e-3)
85 grid
xlabel('Distance focale [km]')
ylabel('I_{90}./I_{max}')

```

B.2.6 Projection élongation unitaire

```

0 %*****
%
%           Auteur : Bruno Duarte
%
%           Projet : Simulation d'une ELG
%
%

```

```

5 %                               Cadre : Travail de diplôme 2006                               *
%                               *
%                               Lieu : Victoria BC - Canada                               *
%                               *
%                               Date : Octobre 2006                                     *
10 %*****
% Variables externes
% Dimensions du Shark-Hartmann(carré)
m = 16;
15 % Distance focale des lenslet
f = 8e-3;    %[m]
% Déclaration des variables internes
20 % Distance jusqu'à l'objet
R = 90e3;   %[m]
% Distance de l'élongation
25 l = 10e3;  %[m]
%Diamètre de la pupille du télescope
D = 30;    %[m]
30 % Variables internes
% Nombre de lentilles
n = linspace(-(m-1)/2,(m-1)/2,m); % [-]
% Création de la matrice position de la totalité des lentilles
35 [X Y] = meshgrid(n,n);
% Conversion de la matrice en coordonnées cylindriques
[theta rho] = cart2pol(X,Y);
40 % Diamètre d'une lenslet conjuguée sur le diamètre de la pupille du
% télescope
d = D/m;
% Distance focale d'une lenslet conjuguée sur le diamètre de la
pupille du

```

```
45 % télescope
F = m*f;

% Offset dû au nombre de lentilles par coté du SH est paire ou
  impaire
offset = d./2./n;

50 % Détermination des angles entre la pupille et l'objet
phia = atan((R+l)/(d.*rho-d/2));
phib = atan(R/(d.*rho-d/2));

55 % Ces angles restent les mêmes à l'intérieur du télescope vu que:
% Les rayons qui passent par le centre optique ne sont pas déviés;
% Application du théorèmes des angles internes - externes;
% Hypothèse : L'objet est suffisamment loin pour que son image de
  forme sur
% le plan focale de la lenslet

60 % Distance du point focal au point A'
FAp = F./tan(phia);

% Distance du point focal au point B'
65 FBp = F./tan(phib);

% Distance A'B'
x = FBp-FAp;

70 % Projection du repère tournant au repère fixe
Xf = cos(theta).*x;
Yf = sin(theta).*x;

% Matrice équivalente sur le Shack-Hartmann
75 Xs = Xf./m;
Ys = Yf./m;

% Pentes affichées par de SH
figure
80 quiver(Xf, Yf)
axis square
```

B.2.7 Projection de la figure d'intensité

Calcul de l'intensité (fonction)

```

0 %*****
%
%           Auteur : Bruno Duarte           *
%
%           Projet : Simulation d'une ELG   *
%
%           Cadre : Travail de diplôme 2006 *
%
%           Lieu : Victoria BC - Canada     *
%
%           Date : Octobre 2006            *
%*****
10 %
% Ce programme permet de calculer le volume de diffraction et d'
%   élongation
% dû à une étoile laser située. Ce script fait appel à deux fonctions
%   . La
% première permet de calculer l'intensité et la deuxième permet d'
%   arranger
15 % les résultats pour qu'ils soient plus facilement exploitables, sans
%   pour
% autant trop chargé le script.
%
% *****
clear all, close all
20 tic
% ***** VARIABLES UTILISATEUR *****

% Rayon de la pupille du laser
a = 0.5;           % [m]
25
% Rayon de la pupille du telescope
A = 15;           % [m]

% Distance focale réelle des lenslet
30 f = 8e-3;       % [m]

% Longueur d'onde du laser
o = 589e-9;       % [m]

```

```
35 % Distance jusqu'au point focal image de l'étoile laser
R = 90e3;          % [m]

% Longueur de l'élongation
l = 10e3;          % [m]
40
% Rayon du cylindre de diffraction
rn = 3;           % [-]

% Dimensions du Shack-Hartmann(carre)
45 m = 4;

% Nombre d'échantillons sur la matrice qui se trouve a la base du
  cylindre
% (échantillons sur une ligne de la matrice)
s = 10;

50 % Nombre d'échantillon sur le parametre t
nt = 10;

% Nombre d'échantillons pour le pas de l'intégrale dans la fonction
  de
55 % l'intensité
nro = 1001;

% ***** VARIABLES PROGRAMME *****

60 % Diamètre de la pupille du laser
d = 2*a;          % [m]

% Diametre de la pupille du telescope
D = 2*A;          % [m]
65
% Délimitation de la matrice de base en fonction de taille relative
  des
% lenslet
u = D/2-D/m/2;

70 % Correlation entre rn et le rayon effectif du cylindre en [m]
r2 = rn*o*R/d;    % [m]
```

```
% Distance focale d'une lenslet conjuguee sur le diametre de la
  pupille du
% telescope
75 F = m*f;

% Formation du vecteur de la position des lentilles
n = linspace(-u,u,m); % [-]

80 % Formation du vecteur de la position des échantillons sur la base du
% cylindre
v = linspace(-1.64,1.64,s);

% Création de la matrice position de la totalite des lentilles
85 [Xb Yb] = meshgrid(n,n);

% Création de la matrice d'échantillonnage du cylindre
[Xe Ye] = meshgrid(v,v);

90 % Transformation des matrices BASE_ind et CYL_ind pour les appliquer
sur
% les boucles for.
BB = reshape([Xb Yb],(m.^2).*2,1);
EE = reshape([Xe Ye],(s.^2).*2,1);

95 % Initialisation de l'altitude de tir
zmin = R-l/2; % [m]
zmax = R+l/2; % [m]

h = waitbar(0,'Patience ...');

100 for i=1:m^2 % "Scan" de matrice lentilles
% Determination des coordonnées x et y. z reste constamment nul.
xb = BB(i);
yb = BB(i+m^2);
105 alpha = atan2(yb,xb);

for j=1:s^2 % "Scan" de matrice d'échantillonnage
% Determination des coordonnées x et y de la matrice
échantillonnage.
```

```
110      % Grâce à ces coordonnées, on peut trouver les cosinus
      % directeurs.
      xe = EE(j);
      ye = EE(j+s^2);

      % Réinitialisation du paramètre t
      t = sqrt((xe-xb)^2+(ye-yb)^2+zmin^2); % [m]

115      % Calcul des angles directeurs
      q = sqrt((xe-xb)^2+(ye-yb)^2);
      beta = acos(q/t);
      gamma = atan2((yb-ye), (xb-xe));
120      Itot = 0;
      dt = ((zmax-zmin)/nt)/sin(beta);

      for k=1:nt % "Scan" du parametre le long du vecteur
      % directeur

125      % Increment sur le parametre t
      if k ~= 1
          t = t + dt;
      end

130      % Equations parametriques
      x = xb - (cos(gamma)*cos(beta))*t;
      y = yb - (sin(gamma)*cos(beta))*t;
      z = sin(beta)*t;

135      % Generation des coordonnees necessaires pour le calcul de
      % l'intensite
      r = sqrt((x)^2+(y)^2);

140      % Condition pour sauvegarder les paramètres

      if k ~= 1
          Itot = Itot + Intensite(a,0.45,o,R,nro,z,r)*dt;
      else
          Itot = Intensite(a,0.45,o,R,nro,z,r);
145      end
      end
end
```



```

150         % Enregistrement des donnees dans la cellule sample
        samples(j) = Itot;
        samples(j+s^2) = alpha;
        samples(j+(s^2+s^2)) = beta;
        samples(j+(s^2+s^2+s^2)) = gamma;
    end

155     % Enregistrement des données dans la cellule lenslet
    coord_ini(i) = xb;
    coord_ini(i+m^2) = yb;

160     % Enregistrement des donnees dans la cellule lenslet
    lenslet(i,:) = samples;

    waitbar(i/m^2)

end

165 result = data_org(m,s,F,lenslet,coord_ini);

    close(h)

170 save('Intens_tot','result');

    ordVector = [];
    for k=1:m
        ordVector = [ordVector [m-(k-1):m:m^2]];
175 end
    result = result(:,:,ordVector);

    for u=1:m^2
        subplot(m,m,u)
180         pcolor(reshape(result(:,2,u),s,s),reshape(result(:,3,u),s,s),...
            reshape(result(:,1,u),s,s))
    end
    toc

```

Calcul de l'intensité (fonction)

```

0 %*****
%
%                               Auteur : Bruno Duarte
%

```

```

%
%
%
5 %
%
%
%
%
%
%
%
%
10 %*****

function I = Intensite(a,wm,o,R,nro,z,r)

% Définition des paramètres nécessaire pour la simulation
15
% Rapport de troncation du faisceau gaussien
T = wm/a;

% Puissance du faisceau
20 P = 1 - exp(-2/T^2);

% F number
F = R/(2*a);

25 % Définition de rn
rn = r./(o*F);

% Définition des variables spaciales et d'intégration
roh = linspace(0,1,nro);
30 nz=length(z);
nrn=length(rn);
pas = 1/(nro-1);

% Construction des matrices de calcul
35 Z = shiftdim(repmat(z',[1,nro,nrn]),1);

RN = shiftdim(repmat(rn',[1,nz,nro]),2);

ROH = repmat(roh',[1,nrn,nz]);
40
% Calcul de la matrice
C = repmat(8*pi*a^2./(o^2.*z.^2*T^2*P),nrn,1);

```

```

I = sum(((exp((-ROH.^2)./T.^2).*...
45   exp((i*pi.*ROH.^2.*a^2)./o.*(1./Z-1/R)).* ...
      besselj(0,((pi.*ROH.*RN.*R)./Z)).*ROH)).*pas,1);
I = C.*abs(squeeze(I)).^2;

```

Projection et organisation des données (fonction)

```

0 function result_org = data_org(m,s,F,lenslet,coord_ini)

% lenslet_org = data_org(nombre de lentilles par coté de la matrice,
%   nombre
% d'échantillons sur le coté de la figure d'élongation,distance
%   focale
% rapportée à la pupille du télescope,données brutes de simulation,
%   données
5 % de l'emplacement des lentilles)

for i=1:m^2

    result_org(:,1,i) = lenslet(i,[1:s^2]);
10    alph(:,i) = lenslet(i,[s^2+1:2*s^2]);
    bet(:,i) = lenslet(i,[2*s^2+1:3*s^2]);
    gam(:,i) = lenslet(i,[3*s^2+1:4*s^2]);

    x0(i,:) = coord_ini(1:m^2);
15    y0(i,:) = coord_ini(m^2+1:2*m^2);

    for j=1:s^2

        % Calcul du parametre t
20        t = -F/sin(bet(j,i));
        xr = (cos(gam(j,i))*cos(bet(j,i)))*t;
        yr = (sin(gam(j,i))*cos(bet(j,i)))*t;
        result_org(j,2,i) = xr;
        result_org(j,3,i) = yr;

25    end
end
end

```

B.2.8 PSF de l'élongation

```
0 % Longueur d'onde du laser
  o = 633e-9;

  % Dimension de l'élongation
  e = 244e-3;

5  % Espace entre SLM et l'élongation
  q = 14.7412;

  % Nombre d'échantillons
10 n = 100;

  % Dimensions du SLM
  L = 15.36e-3;
  l = 8.64e-3;

15  % Rayon de l'élongation
  r0 = 2e-6;

  % Vecteur parcourant tout le rayon du SLM
20 rh = linspace(1e-6,l/2,n);

  % Calcul de l'équation qui relie la distance focale au rayon du SLM
  % pente = dénivellation/distance horizontale
  p = e/(l/2);

25  % Calcul de la focale
  F = p.*rh + q;

  % Calcul de la phase que le SLM doit imposer
30 phiSLM=2*pi.*rh.^2./(2.*o.*F);

  % Calcul du diamètre des anneaux
  D = o.*F./r0;

35  % Valeur maximale de D
  Dmax = l;
```

```

% Calcul de la valeur r0 minimale de l'élongation pour que Dmax soit
% dans le SLM
r0max=o*F(end)/Dmax;
40
% Rectification du vecteur diamètre
% Dn = Dmax.*D./D(end);
Dn = o.*F./r0max;

45 % Construction du vecteur qui va limiter l'amplitude en fonction du
% diamètre
% Vecteur des surfaces
S = pi/4.*Dn.^2;
% Le produit de l'amplitude par la surface doit être constant. J'
% impose une
50 % amplitude unitaire pour la plus petite surface et je fais la
% décroître en
% fonction de la surface
A = 1;
An = A.*S(1)./S;

55 % Calcul de la psf en fonction des diamètres
[x y]=size(F);
r0 = linspace(0,2*r0max,n);
Di = rh(1:end-1);
ri(1:y) = zeros;
60 ri(2:end)=Di./Dn(2:end);
a0 = r0./(o.*F);
psf1 = ((2.*besselj(1,(pi.*rh.*a0)))./(pi.*rh)).^2;
psf = ((2.*besselj(1,(pi.*rh.*a0)))./(pi.*rh.*...
a0)-ri.^2.*(2*besselj(1,(pi.*rh.*a0.*ri)))./...
65 (pi.*rh.*a0.*ri)).^2;

for i=1:y
    for k=1:y
70         a0 = r0(k)./(o.*F(i));

        PSF(i,k) = ((2.*besselj(1,(pi.*rh(i).*a0)))./(pi.*rh(i).*...
a0)-ri(i).^2.*(2*besselj(1,(pi.*rh(i).*a0.*ri(i))))./...
(pi.*rh(i).*a0.*ri(i))).^2;
75     end

```

```
end

figure
plot(rh,phiSLM/(pi))
80 title('Détermination de la phase en fonction du rayon du SLM')
   xlabel('Rayon du SLM [m]')
   ylabel('Phase [pi]')
   legend('Phase en fonction du rayon du SLM','Location','SouthEast')

85 figure
   imagesc(PSF)
   title('PSF élongation')
   xlabel('Longueur élongation [m]')
   ylabel('PSF')
90 colorbar
   rho = repmat(rh,n,1);
   t = linspace(0,2*pi,n);
   theta = repmat(t',1,n);

95 figure
   polar(theta,rho)
   title('Echantillonnage du diamètre de SLM en fonction du nombre de
         points d''élongation')
   xlabel('Rayon du SLM [m]')
```

Annexe C

Publications

Les prochaines pages sont destinées aux publications qui ont vraiment contribué à la réalisation de ce travail.

Spot size, depth-of-focus, and diffraction ring intensity formulas for truncated Gaussian beams

Hakan Urey

Simple polynomial formulas to calculate the FWHM and full width at $1/e^2$ intensity diffraction spot size and the depth of focus at a Strehl ratio of 0.8 and 0.5 as a function of a Gaussian beam truncation ratio and a system f -number are presented. Formulas are obtained by use of the numerical integration of a Huygens–Fresnel diffraction integral and can be used to calculate the number of resolvable spots, the modulation transfer function, and the defocus tolerance of optical systems that employ laser beams. I also derived analytical formulas for the diffraction ring intensity as a function of the Gaussian beam truncation ratio and the system f -number. Such formulas can be used to estimate the diffraction-limited contrast of display and imaging systems. © 2004 Optical Society of America

OCIS codes: 110.3000, 120.2040, 120.5800, 170.5810, 260.1960, 350.5730.

1. Introduction

The characteristics of focused Gaussian beams play an important role in the design of optical systems that employ lasers, such as various laser scanning display and imaging systems^{1,2} and certain layered and page-oriented optical storage architectures.^{3,4} The amount of beam truncation at hard apertures is an important system design parameter that determines the radial and axial size of focused Gaussian beams and has been extensively studied in the literature with numerical methods by direct integration of the diffraction integral^{5–9} or by analytic methods by use of a slowly converging infinite series of expansions.^{10–14}

Prior research in this area focused mainly on developing formulas for the estimation of the shape and the encircled energy of the central main lobe, the location of the peak axial irradiance, and the location of the diffraction ring minimums and maximums. Mahajan^{5,6} derived exact analytical formulas for the axial intensity of focused Gaussian beams and obtained numerical results for the encircled energy in the presence of obscurations and aberrations. Li⁷ and Yura⁸ derived numerical formulas for the mini-

mum and maximum points for diffraction ring irradiance at the focal plane. More recently, Nourrit¹³ derived piecewise analytical expressions for the truncated Gaussian beams in the Fresnel and Fraunhofer regime using asymptotic expansions and calculated the shape and the extrema locations of diffraction rings using finite summation formulas. Drege¹⁴ found a closed-form expression for the far-field divergence angle.

In this paper I first derive two sets of simple polynomial formulas to calculate the width (rather than the shape) of the focused spot and the depth of focus as a function of beam truncation and the f -number of the focusing geometry. First, I derive polynomial formulas for the size of the focused spot using FWHM and full-width at $1/e^2$ irradiance criterion. Second, I calculate the depth of focus along the optical axis where the axial irradiance drops to 80% and 50% of the focal-plane axial irradiance.

Nourrit¹³ and others listed in his references tried several methods to obtain analytical formulas to determine the minima of the diffraction rings for truncated Gaussians, but a closed-form expression cannot be found. I derived simple analytical formulas to estimate the peak and average diffraction ring irradiance as a function of Gaussian beam truncation. Diffraction ring minima are then solved numerically for different values of truncation to provide a complete solution for the irradiance profile of diffraction rings.

The formulas given in this paper can be utilized in designing various laser imaging systems for display, image capture, target tracking, microscopy, optical storage, and laser printing applications. Spot-size

H. Urey (hurey@ku.edu.tr) is with the Department of Electrical Engineering and Optoelectronics Research Center, Koç University, Sariyer, 34450 Istanbul, Turkey.

Received 8 August 2003; revised manuscript received 30 September 2003; accepted 14 October 2003.

0003-6935/04/030620-06\$15.00/0

© 2004 Optical Society of America

Table 1. Optical System Parameters for Three Exemplary Optical Imaging Systems for Different Applications Assuming $T = 1^a$

Application	Case 1 Scanning Display	Case 2 Imaging	Case 3 Projection/ Target Tracking
a (mm)	0.5	5	1
λ (nm)	635	635	635
R (mm)	80	20	2000
N	5	1969	1
$f_\#$	80.0	2.0	1000.0
FWHM spot size s_{fwhm} (μm)	57.6	1.4	720.1
Depth of focus $-\Delta$ (mm)	9	0.005	1340
R/Δ - ratio	9.3	3731.8	1.5
R_2 (mm) for $r_n = 20$	1.016	0.0254	12.7

^aTable 2 formulas are used to calculate the spot size and the depth of focus.

Gaussian beam $1/e$ amplitude (or $1/e^2$ irradiance) radius at the aperture. The irradiance ($I = |U|^2$) at the far field can be calculated by use of the Huygens–Fresnel diffraction integral with the Fresnel approximations:^{6,9}

$$I(T, r_2, z) = \left| \int_0^a \frac{2\pi}{\lambda z} |U(r, w_m)| \exp \left[\frac{i\pi r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) \right] J_0 \left(\frac{2\pi r r_2}{\lambda z} \right) r dr \right|^2, \quad (3)$$

where λ is the wavelength, R is the distance from the aperture to the Gaussian focal plane where the waist is located, z is the distance from the aperture to the observation plane, and r_2 is the radial distance from the optical axis in the observation plane. The Fresnel approximation used to obtain the above integral is valid when $z \gg a$ and $z \gg r_2$, which impose far-field and paraxial conditions.¹⁵ Typical optical system parameters for different applications are given in Table 1. Note that far-field and paraxial conditions are satisfied for the imaging systems specified in the table.

Mahajan⁵ showed that the peak axial irradiance near the focal plane shifts toward the clipping aperture, and the amount of shift is a function of the Fresnel number, which is defined as $N = a^2/\lambda R$ and is a measure of the importance of diffraction effects in the beam due to the clipping aperture (e.g., a small Fresnel number indicates greater effects of diffraction). Location of the peak axial irradiance shifts by more than 5% for systems with small Fresnel numbers ($N < 5$). However, for small Fresnel numbers, a system with a small aperture and a large focus distance compared with λ , such as Case 3 in Table 1, the depth of focus becomes very large, and the focused spot size and the encircled energy within a radius r_2 for $r_2 > \lambda R/a$ become insensitive to the shift of the peak axial irradiance position.^{5,6} Therefore focused spot size can be determined with the irradiance distribution at the geometrical focal plane for all

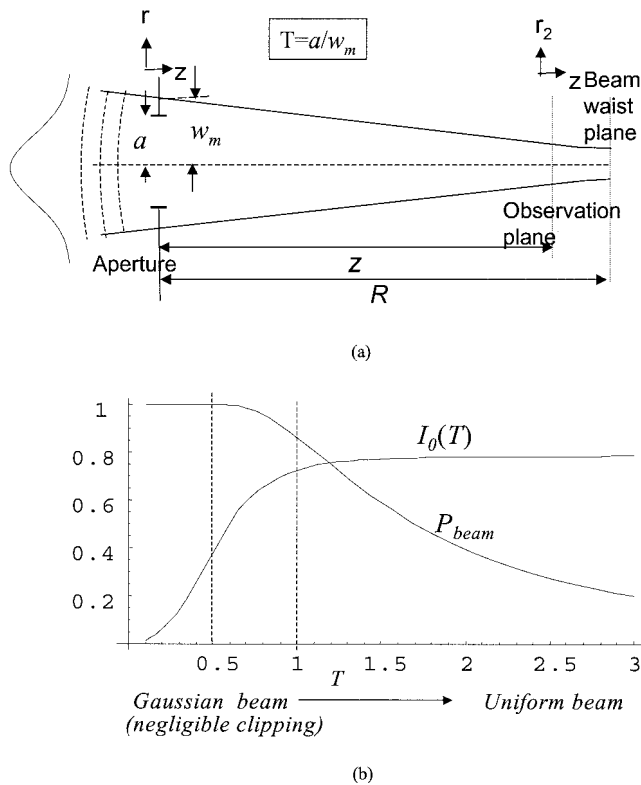


Fig. 1. (a) Schematic of converging Gaussian beam truncated by a hard aperture; (b) Power loss at the aperture and peak focal plane irradiance as a function of T .

and depth-of-focus formulas are useful for determining system resolution, modulation transfer function, and field curvature tolerance, and the diffraction ring intensity formulas are useful in determining the diffraction-limited contrast of display and imaging systems. In Section 5, I discuss the tradeoffs presented by the choice of the beam truncation ratio in an optical system design.

2. Gaussian Beam and Diffraction Integral

Consider a unity-power converging Gaussian beam, illustrated in Fig. 1(a), incident on a circular aperture (located at the exit pupil of the imaging system). The beam waist for the unclipped beam is located at a distance R behind the aperture. The modulus of the complex wave amplitude of the Gaussian beam (without the quadratic phase factor) before the aperture can be expressed as

$$|U(r, w_m)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_m} \exp\left(-\frac{r^2}{w_m^2}\right), \quad (1)$$

where r is the radial distance from the optical axis and w_m is the beam radius. Using Eq. (1), the beam power transferred from a circular aperture of radius a can be calculated as

$$P_{\text{beam}} = 1 - \exp(-2a^2/w_m^2) = 1 - \exp(-2/T^2), \quad (2)$$

where $T = w_m/a$ is the Gaussian beam truncation ratio, defined as the ratio of the aperture radius to the

Fresnel-number and beam-truncation ratios encountered in imaging systems (except for the case when the aperture size is not much larger than λ , which is not of interest for the imaging applications considered here). I therefore neglect the focus shift and determine the spot size by turning attention to the irradiance distribution at the Gaussian focal plane (i.e., $z = R$).

I simplify the math by using the following normalized variables: $f_{\#} = R/(2a)$ is the focal ratio of the focusing geometry, $\rho = r/a$ is the normalized aperture coordinate, and $r_n = r_2/\lambda f_{\#}$ is the normalized radial focal-plane coordinate. After substituting the variables in Eq. (3) and normalizing the irradiance with P_{beam} , the diffraction integral for points near the focal plane can be rewritten as

$$I(T, r_n, z) = \frac{8\pi a^2}{\lambda^2 z^2 T^2 P_{\text{beam}}} \left| \int_0^1 \exp(-\rho^2/T^2) \exp \left[\frac{i\pi \rho^2 a^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) \right] J_0 \left(\frac{\pi \rho r_n R}{z} \right) \rho d\rho \right|^2, \quad (4)$$

where $\Delta z = R - z$ is the defocus. The diffraction integral at the focal plane (i.e., $z = R$) simplifies to

$$I_{\text{focal}}(T, r_n) = \frac{2\pi}{\lambda^2 f_{\#}^2 T^2 P_{\text{beam}}} \times \left| \int_0^1 \exp(-\rho^2/T^2) J_0(\pi \rho r_n) \rho d\rho \right|^2. \quad (5)$$

The axial irradiance (I_0), which is the peak irradiance for an arbitrary T and for uniform beam illumination ($T \rightarrow \infty$) are found by substituting $r_n = 0$:

$$I_0(T) = \frac{\pi T^2 [1 - \exp(-1/T^2)]^2}{2\lambda^2 f_{\#}^2 [1 - \exp(-2/T^2)]},$$

$$I_0(T \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{4\lambda^2 f_{\#}^2}. \quad (6)$$

Figure 1(b) shows the beam power and the peak irradiance given in Eqs. (2) and (6) as a function of T . As T increases, the power loss at the aperture increases. If the power is normalized with the power transferred from the aperture, then the peak axial irradiance increases with T and reaches maximum for uniform illumination. If the power is normalized with the incident power, then the optimal truncation ratio that gives the peak axial irradiance is around $T = 0.9$ (Ref. 11). This result is not really significant in an imaging system, since the width of the focused spot and the encircled energy is far more important than the peak axial irradiance.

An analytical formula for the beam irradiance along the optical axis as a function of defocus $\Delta z = R - z$ and Fresnel number N can be obtained by setting $r_n = 0$ in Eq. (4) (integration is carried out by

use of MATHEMATICA™ by Wolfram Research, Inc., Champaign, Ill.):

$$I_{\text{axial}}(T, z) = \frac{2\pi a^2 T^2 \left[\coth(1/T^2) - \cos \left(\frac{\pi N \Delta z}{z} \right) / \sinh(1/T^2) \right]}{\lambda^2 z^2 \left(1 + \frac{\pi^2 T^4 N^2 \Delta z^2}{z^2} \right)}. \quad (7)$$

For small N , I_{axial} is not symmetrical on either side of the focus, and as discussed above, the peak axial irradiance shifts toward the aperture. Mahajan¹⁵ discusses the properties of I_{axial} in more detail.

3. Focal Plane Spot Size and Depth of Focus

For a converging beam truncated at a circular aperture, the focused beam profile is Gaussian for $T < 0.5$ and converges to the Airy pattern as $T \rightarrow \infty$. One can define a diffraction spot diameter (s) on the basis of a certain fraction of the peak irradiance, such as 0.5 or $1/e^2$. The corresponding r_n can be solved by setting the ratio of I_{focal} to I_0 , given in Eqs. (5) and (6), equal to a constant. If the constant used is larger than the maximum diffraction ring intensity, one can find a unique solution for r_n within the central lobe of the irradiance profile as a function of T . Since r_n is normalized with $\lambda f_{\#}$, the focal plane spot size (s) can be expressed as

$$s = K\lambda f_{\#}, \quad (8)$$

where K is the spot size constant that is a function of beam truncation only and is independent of other system parameters. The paraxial approximation limits the validity of this formula to $f_{\#} > 2$. An alternative form of this formula is to express the spot size as $s = 0.5K\lambda/(\text{NA})$, where NA is the numerical aperture of the system. This alternative form is more accurate for $f_{\#} < 2$, such is the case in lithography or microscopic imaging systems.

Similarly, one can find Δz , where I_{axial} becomes a certain fraction of I_0 , such as 0.8 or 0.5. Equations (4) and (7) reveal that, if I_{axial}/I_0 ratio is set equal to a constant, for each particular value of T , the solution to the equation yields a constant value for the term $N\Delta z/z$ ratio. Therefore I can express Δz as a function of z/N . Furthermore, when the defocus is small compared with the focus distance (i.e., $\Delta z < R$), Δz can be written as proportional to $\lambda f_{\#}^2$, as follows:

$$\Delta z = K_2 z / 4N \approx K_2 \lambda f_{\#}^2, \quad (9)$$

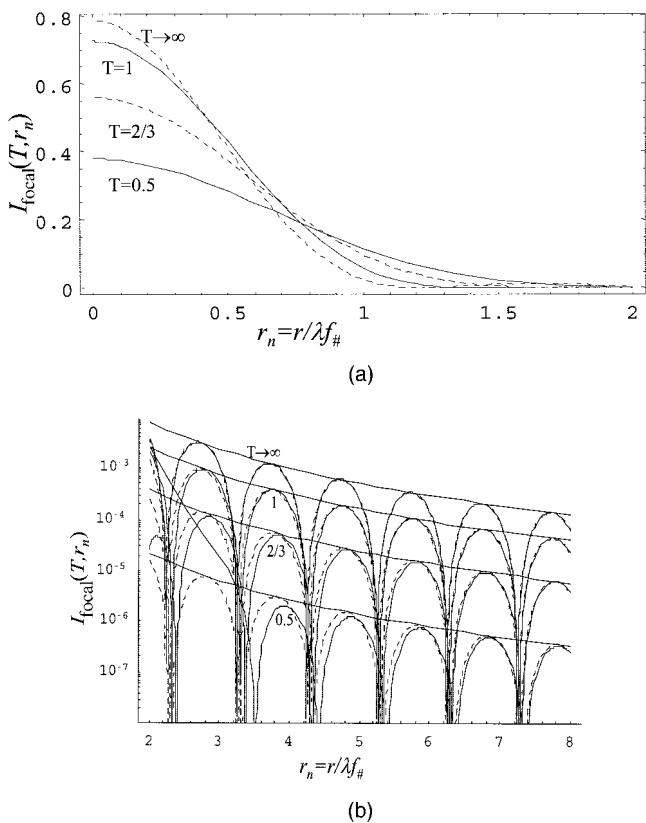


Fig. 2. Focal plane irradiance cross sections for different Gaussian beam truncation ratios assuming unity total power beam. (a) Irradiance for $r_n < 2$, (b) Irradiance in log scale for $r_n > 2$. Solid curves are numerical solution of Eq. (5) normalized by the beam power transferred from the aperture, and dashed curves are approximate analytical solutions of Eqs. (12) and (13). Peak ring irradiances are also shown.

where K_2 is the depth-of-focus constant that is a function of beam truncation only and is independent of other system parameters. The approximation in the above figure is valid in systems where $N < 5$ (e.g., K_2 formulas are not valid for Case 3 in Table 1). For systems where $N < 5$, the axial irradiance profile is not symmetrical around the geometric focus, and the

maximum axial irradiance shifts from the geometric focal plane towards the aperture. Other system parameters play a role, and the $\Delta z = K_2 \lambda f_{\#}^2$ approximation is no longer valid. The depth of focus can be calculated directly by use of Eq. (7). However, in such systems the depth of focus is large enough that one need not worry about effects of defocusing.

Figure 2 shows the numerical simulation results obtained with Eq. (5) and illustrates how the spot profile, the peak irradiance, the spot width, and the energy shifted to the diffraction rings change with T .

Table 2 is a summary of my results in this section and shows the simple formulas for the diffraction-limited spot diameter coefficient K and the depth of focus coefficient K_2 . The table formulas are obtained by polynomial curve fitting to the numerical solutions of Eqs. (5) and (7). K is calculated for two commonly used spot-size criteria in imaging systems: full width at $1/e^2$ -irradiance (FWE2) and FWHM irradiance. K_2 is calculated for a Strehl Ratio (SR) of 0.8 and a SR of 0.5 cases, where SR is defined as the ratio of the axial irradiance at the observation plane to the peak axial intensity at the focal plane. SR = 0.5 corresponds to the Rayleigh range for a Gaussian beam, and SR = 0.8 corresponds to the diffraction-limited range of a beam in imaging systems. The depth-of-focus formulas in Table 2 can be used to compute the depth of a page in a page-oriented three-dimensional optical memory or the depth-of-focus and the field-curvature aberration tolerance of a scanning display or imaging system.

Drege¹⁴ gives an analytical expression for the far-field divergence angle of a truncated Gaussian beam. By use of Drege's result and after some algebra, the following analytical formula for the FWE2 irradiance spot-size coefficient can be obtained:

$$K_{\text{FWE2}} = \frac{0.97}{T} \left[\frac{e}{1 - \exp(-1/T^2)} - 1 \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Figure 3 illustrates the K factor as a function of T , using the formulas in the first row of Table 2. My empirical formulas for FWE2 and FWHM irradiances are within 1%, and Drege's approximate FWE2 for-

Table 2. Spot Size and Depth-of-Focus Formulas as a Function of Truncation Ratio T . K and K_2 for $T < 0.5$ Are Calculated by Use of Standard Gaussian Beam Formulas

$T = w_m/a$ $f_{\#} = R/2a$	$T < 0.5$ (Gaussian)	$T > 0.4$ (Truncated Gaussian) [Error < 1%]
Spot Size $s = K \lambda f_{\#}$		
full width at $1/e^2$ irradiance	$K_{\text{FWE2}} = \frac{1.27}{T}$	$K_{\text{FWE2}} = 1.654 - \frac{0.105}{T} + \frac{0.28}{T^2}$
full width at 50% irradiance	$K_{\text{FWHM}} = \frac{0.75}{T}$	$K_{\text{FWHM}} = 1.036 - \frac{0.058}{T} + \frac{0.156}{T^2}$
Depth of Focus $\Delta z = K_2 \lambda f_{\#}^2$		
K_2 for Strehl Ratio = 0.5	$K_{2,\text{SR}=0.5} = \frac{1.27}{T^2}$	$K_{2,\text{SR}=0.5} = 3.5 + \frac{0.33}{T} - \frac{0.73}{T^2} + \frac{0.52}{T^3}$
K_2 for Strehl Ratio = 0.8	$K_{2,\text{SR}=0.8} = \frac{0.635}{T^2}$	$K_{2,\text{SR}=0.8} = 2.05 + \frac{0.12}{T} - \frac{0.28}{T^2} + \frac{0.22}{T^3}$

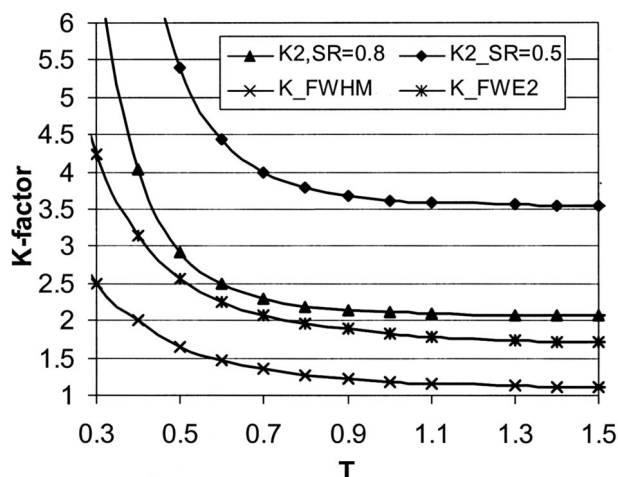


Fig. 3. Spot-size constant and the depth-of-focus constants as a function of T by use of the formulas in Table 1.

mula is within 3% of the numerical integration results. As N and $f_{\#}$ become larger, the formulas have better accuracy.

4. Diffraction Ring Irradiance

I derive analytical formulas for estimating the diffraction ring irradiance for points away from the optical axis (large r_n) as a function of T . Closed-form simple expressions for the diffraction ring peak irradiance cannot be found elsewhere in the literature.

The following approximation can be used for the Bessel function in Eq. (5) for large values of x ¹⁶

$$J_o(x) \approx \sqrt{2/\pi x} \cos(\pi/4 - x). \quad (11)$$

Figure 4(a) shows the integrand in Eq. (5) and its approximation by use of Eq. (11) for an exemplary case of $T = 1$. The figure illustrates that the approximation is indeed a good one for $r_n \gg 1$. Note that when $r_n \gg 1$ the integrand in Eq. (5) alternates sign approximately r_n times between the limits of integration. Owing to the large number of oscillations, the value of the integral crosses zero many times, the last one being near $\rho = 1$. Therefore we can approximate the integral by moving the exponential term outside the integral by substituting $\rho = 1$ for that term. The integrands in exact form and in approximate form can then be written as

$$\begin{aligned} \text{Integrand_exact} &= \int_0^1 \exp(-\rho^2/T^2) J_o(\pi \rho r_n) \rho d\rho, \\ \text{Integrand_approx} &= \exp(-1/T^2) \sqrt{\frac{2}{\pi^2 r_n}} \int_x^1 \cos(\pi/4 \\ &\quad - \pi \rho r_n) d\rho, \end{aligned} \quad (12)$$

where x is the coordinate of the last zero crossing of the integral and depends mainly on r_n and becomes very close to 1 as r_n increases. The approximation in Eq. (12) is also supported by Fig. 4(b), which shows the results of the integrations in Eq. (12) for $T = 1$ when

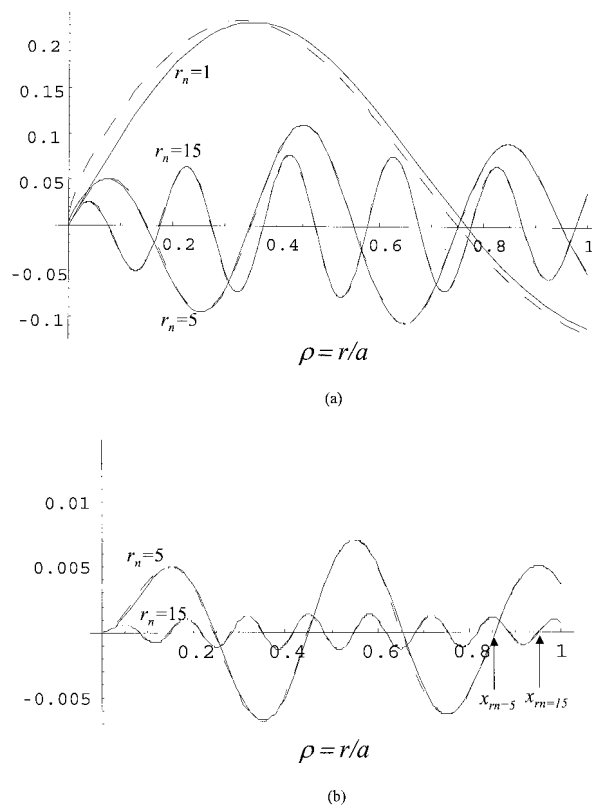


Fig. 4. (a) Integrand and the result of integration in Eq. (12) as a function of ρ for different values of r_n , with dashed curves showing the exact formula and solid curves showing the approximate formula in Eq. (12); (b) the result of the integral for the integrand in (a) with integration limit from 0 to ρ (result for $r_n = 1$ is too large and is not shown).

the limits of integrations are set from 0 to ρ . Figure 4(b) also illustrates that the location of the last zero crossing is given approximately by $x \approx 1 - 1/r_n$.

The integral in Eq. (5) can then be approximated as

$$\begin{aligned} I_{\text{focal}}(T, r_n) &\approx \frac{2\pi \exp(-2/T^2)}{\lambda^2 f_{\#}^2 T^2 P_{\text{beam}}} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi^2 r_n}} \right. \\ &\quad \times \left. \int_x^1 \cos(\pi/4 - \pi \rho r_n) d\rho \right|^2 \\ &\approx \frac{4 \exp(-2/T^2)}{\lambda^2 f_{\#}^2 \pi^3 r_n^3 T^2 P_{\text{beam}}} \sin^2(\pi r_n - q), \end{aligned} \quad (13)$$

where $P_{\text{beam}} = \exp(-2/T^2)$ and q is a phase factor that is a function of r_n and T . For large r_n (i.e., beyond the second zero crossing of the irradiance profile), numerically determined values of q for $T = 0.5$, $T = 0.66$, $T = 1$, and $T \rightarrow \infty$ are 1.04, 0.93, 0.84, and 0.77, respectively. Phase factor q for other T can be estimated by interpolation.

The Airy pattern for large r_n is the limit of Eq. (13) when $T \rightarrow \infty$:

$$I_{\text{focal}}(T \rightarrow \infty, r_n) \approx \frac{2 \sin^2(\pi r_n - \pi/4)}{\lambda^2 f_{\#}^2 \pi^3 r_n^3}. \quad (14)$$

Figure 2(b) shows the numerical solution of the integral in Eq. (5) (solid curves) and the approximate solution obtained by use of Eq. (13) (dashed curves). As r_n becomes larger, the dashed curves in the figure converge to the solid curves. The approximate formulas work well beyond the second zero crossing of the function. The limiting case $T \rightarrow \infty$ gives a good approximation for the Airy pattern for $r_n > 0.6$. The figure also shows the peak diffraction ring irradiances in each case. Since the average value of \sin^2 term in Eq. (13) is 0.5, the average diffraction ring irradiance can be written as the half of the peak irradiance:

$$I_{\text{focal,avg}}(T, r_n) = \frac{2 \exp(-2/T^2)}{\lambda^2 f_{\#}^2 \pi^3 r_n^3 T^2 [1 - \exp(-2/T^2)]},$$

$$I_{\text{focal,avg}}(T \rightarrow \infty, r_n) = \frac{1}{\lambda^2 f_{\#}^2 \pi^3 r_n^3}. \quad (15)$$

5. Discussion and Conclusions

I presented simple polynomial formulas for calculating the FWHM and FWE2 spot size and depth of focus at the SRs of 0.8 and 0.5. The spot size and depth of focus are expressed as a function of λ and $f_{\#}$, which greatly simplifies the optical system design problem whenever the approximation is valid. The formulas are valid when $N > 5$ and $f_{\#} > 2$, such as the scanning display and imaging systems listed in Table 1. For systems with a small Fresnel number ($N < 5$), such as target tracking systems or projection display systems, the depth-of-focus formulas are not valid, but the depth of focus is so large that the defocus and the field curvature aberration owing to defocus is not an issue.

I also presented a simple closed form formulas for diffraction ring irradiance using an analytical approximation to the diffraction integral shown in Eqs. (14) and (15). These equations are the simplest expressions for the numerical computation of the diffraction ring irradiance as a function of beam truncation for large r_n .

I used the formulas in Table 1 and Eq. (15) in the design of various optical systems, such as a confocal imaging system, a Retinal Scanning Display design, and two-photon absorption volumetric optical storage systems.¹⁻³ A range of values for typical optical system parameters used in imaging and display applications is given in Table 2. As N and $f_{\#}$ become larger, the formulas have better accuracy.

In most imaging systems employing Gaussian beams, the optimal aperture size (or exit pupil size) can be obtained by setting T in the range $0.4 < T < 1$. In scanning systems, such as Retinal Scanning Displays, the limiting system aperture is typically the scan mirror, and the tradeoff in choosing T is between the system resolution,¹ the power efficiency, the maximum achievable contrast,^{17,18} and the display exit pupil profile that is shaped using a binary diffraction grating.¹⁹ For $T < 0.5$, the mirror is underfilled. Clipping at the aperture is negligible, and the beam profile remains Gaussian as it propagates; however, the system resolution is poor. For $T > 1$, the mirror is overfilled, and

the focused spot profile converges to an Airy pattern as $T \rightarrow \infty$, yet the power lost at the aperture and the diffraction ring intensities may be too large, limiting the diffraction-limited maximum achievable contrast of the display. $T < 0.5$ appears too conservative, and increasing T beyond 1.0 increases the power loss and reduces the maximum achievable contrast substantially without improving the resolution. As an example, increasing truncation from $T = 2/3$ to $T = 1$ increases the power loss from 1.1% to 13.5%, reduces the FWHM spot size, and increases the scanning system resolution by 13%. However, it increases the energy shifted to the diffraction rings, reducing the maximum achievable diffraction limited contrast by a factor of ~ 7.5 .¹⁷

References

1. H. Urey, D. Wine, and T. Osborn, "Optical performance requirements for MEMS scanner based microdisplays," in *MOEMS and Miniaturized Systems*, M. E. Motamedi and R. Goering, eds., Proc. SPIE **4178**, 176-185 (2000).
2. G. Marshall, ed., *Optical Scanning* (Marcel-Dekker, New York, 1991).
3. H. Urey and F. B. McCormick, "Storage limits of two-photon based three-dimensional memories," in *Optical Computing*, Vol. 8 of OSA Proceedings Series (Optical Society of America, Washington, D.C., 1997), pp. 134-136.
4. M. M. Wang, S. C. Esener, F. B. McCormick, I. Cokgor, A. S. Dvornikov, and P. M. Rentzepis, "Experimental characterization of a two-photon memory," *Opt. Lett.* **22**, 558-560 (1997).
5. V. N. Mahajan, "Axial irradiance and optimum focusing of laser beams," *Appl. Opt.* **22**, 3042-3053 (1983).
6. V. N. Mahajan, "Uniform versus Gaussian beams: a comparison of the effects of the diffraction, obscuration, and aberrations," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 470-485 (1986).
7. Y. Li, "Degeneracy in the Fraunhofer diffraction of truncated Gaussian beam," *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1237-1242 (1987).
8. H. T. Yura, "Optimum truncation of a Gaussian beam for propagation through atmospheric turbulence," *Appl. Opt.* **34**, 2774-2779 (1995).
9. H. T. Yura and T. S. Rose, "Gaussian beam transfer through hard-aperture optics," *Appl. Opt.* **34**, 6826-6828 (1995).
10. P. Belland and J. P. Crenn, "Changes in the characteristics of a Gaussian beam weakly diffracted by a circular aperture," *Appl. Opt.* **21**, 522-527 (1982).
11. K. Tanaka, N. Saga, and H. Mizokami, "Field spread of a diffracted Gaussian beam through a circular aperture," *Appl. Opt.* **24**, 1102-1106 (1985).
12. G. Lenz, "Far-field diffraction of truncated higher-order Laguerre-Gaussian beams," *Opt. Commun.* **123**, 423-429 (1996).
13. V. Nourrit, J.-L. de Bougrenet de la Tocnaye, and P. Chanclou, "Propagation and diffraction of truncated Gaussian beams," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 546-556 (2001).
14. E. M. Drege, N. G. Skinner, and D. M. Byrne, "Analytical far-field divergence angle of a truncated Gaussian beam," *Appl. Opt.* **39**, 4918-4925 (2000).
15. V. N. Mahajan, *Optical Imaging and Aberration Part II, Wave Diffraction Optics* (SPIE Press, Bellingham, Wash., 2001).
16. M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
17. H. Urey, "Diffraction limited resolution and maximum contrast for scanning displays," *Proc. Soc. Inf. Disp.* **31**, 866-869 (2000).
18. G. de Wit, "Contrast budget of head mounted displays," *Opt. Eng.* **41**, 2419-2426 (2002).
19. H. Urey, "Diffractive exit-pupil expander for display applications," *Appl. Opt.* **40**, 5840-5851 (2001).

Wave optical algorithm for creating digitally synthetic holograms of three-dimensional surface objects

K. Matsushima and A. Kondoh

Department of Electrical Engineering, Kansai University
Yamate-cho 3-3-35, Suita, Osaka 564-8680, Japan

ABSTRACT

Progress in a novel wave-optical algorithm for synthesizing object waves of three-dimensional surface objects is reported. The algorithm has been proposed last year and has a feature of wave-optical calculation in diffraction by object surfaces. Numerical simulation of diffraction is implemented by a method based on coordinates rotation in Fourier spectrum. Source fields on a surface of objects are given as complex property functions defined on each object surface. These property functions provide information on each surface, such as the shape and diffusiveness. General formulation of the algorithm has been presented, but its numerical implementation was limited only to the cases of single axis rotation of plane surfaces.

In this investigation the limitation is removed, i.e. two-axes rotation of plane surfaces is presented and reconstruction of holograms of 3-D objects composed of rotated planes are demonstrated. Furthermore, compensation of surface brightness is discussed for accurate shading objects.

Keywords: computer-generated hologram, digitally synthetic hologram, surface model, shading

1. INTRODUCTION

In digitally synthetic holograms (or computer-generated holograms; CGH), some object models and methods for synthesizing object waves emitted from the three-dimensional (3-D) objects has been proposed to create real auto-stereoscopic 3-D images. One of the most important models is the layer model, in which the object is sliced into a plane parallel to the hologram and light fields emitted from every plane are wave-optically calculated as ordinary diffraction such as Fresnel diffraction. While the method has a definite advantage of relatively short computation time owing to utilization of FFT especially in full-parallax hologram, there is a major drawback to realistic rendering of 3-D objects such as shading, shadowing, texture-mapping and so on.

An alternative model recently used is the point source model, which is sometimes referred to as the ray-tracing method in CGH.^{1,2} A 3-D object is considered as a collection of numerous point sources of light in the model, and the object wave is obtained by superimposing all spherical waves from point sources in the hologram plane. Since computation time of the ray-tracing is proportional to both numbers of point sources and sampling points in the hologram, slow computation is a major disadvantage of the method, especially in full-parallax holograms. To overcome the problem of computation time in the ray-tracing some algorithm has been proposed, such as real-valued fringe intensity,^{2,3} utilization of geometric symmetry⁴ and special hardware,⁵⁻⁷ lookup table,³ recurrence formulas⁸ and difference formulas.⁹

One another method we refer it to as the wave optical algorithm in surface model has been suggested in the last meeting.¹⁰ In the method an object is composed of planar surfaces and the object wave is wave-optically calculated as reflection and diffraction by the tilted surfaces. The mathematical and physical basics have been presented, but a hologram of planar objects rotated only upon a single axis has been discussed and its reconstruction was demonstrated. This report follows with creating holograms for true 3-D objects made up from planes rotated on two-axes, as well as shading the objects by using a numerical model of brightness of reconstructed planar surfaces.

Further author information: (Send correspondence to Matsushima)
Matsushima: E-mail: matsu@kansai-u.ac.jp, Telephone: +81-6-6368-0933

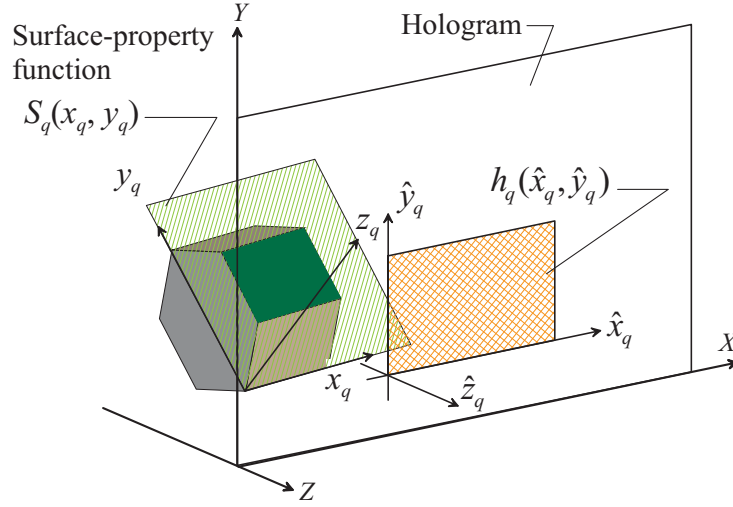


Figure 1. An object model and coordinate system used to synthesize object waves.

2. OBJECT MODEL AND SURFACE PROPERTY FUNCTION

Coordinates system and geometry used in this investigation is shown in Fig. 1. The global coordinates, referred to as hologram coordinates, is denoted by (X, Y, Z) , and the hologram is placed on the $(X, Y, 0)$ plane. Local coordinates defined for each surface of the object are (x_q, y_q, z_q) in a surface q . All local coordinates are defined so that the planar surface is placed on the $(x_q, y_q, 0)$ plane. Furthermore, we define a complex function $s_q(x_q, y_q)$ in the $(x_q, y_q, 0)$ plane to give the surface q its properties such as the shape, brightness, diffusiveness, feel of material, textures and so on. These complex functions are referred to as the surface property function. In addition, we define one another coordinates, the parallel local coordinates $(\hat{x}_q, \hat{y}_q, \hat{z}_q)$, in which the origin is identical to the local coordinates but all axes are parallel to that of the hologram coordinates.

All surface property functions are defined in the following form:

$$s_q(x_q, y_q) = a_q(x_q, y_q)p_q(x_q, y_q)\Psi(x_q, y_q), \quad (1)$$

where $a_q(x_q, y_q)$ is a real function and mainly keeps the shape of the surface q and its texture. A surface property function defined only by the factor $a_q(x_q, y_q)$ do not have any diffusiveness, just like as a slide projector, and therefore it must be multiplied by a given diffusive phase function; a diffuser given as the complex function:

$$\Psi(x_q, y_q) = \exp[ik\phi_d(x_q, y_q)]. \quad (2)$$

Here, we used a digital diffuser proposed for Fourier holograms¹¹ to the phase function $\phi_d(x_q, y_q)$.

If a surface property function are given as $a_q(x_q, y_q)\Psi(x_q, y_q)$, the carrier frequency of the object wave are placed at the zero frequency in the local coordinates. This means that the light wave of the surface is emitted in the direction perpendicular to the surface. Therefore, a phase of the plane wave propagating along the Z axis (i.e. in the direction perpendicular to the hologram) should be multiplied by the two factors given above. The plane wave is written by

$$p_q(x_q, y_q) = \exp[ik(\cos \alpha_q x_q + \sin \beta_q y_q)], \quad (3)$$

where $\cos \alpha_q$ and $\cos \beta_q$ are the direction cosines in X and Y axis, respectively.

The surface property function given above is transformed into the complex amplitude $h_q(\hat{x}_q, \hat{y}_q)$ in the local parallel coordinates by the method described in Ref. 10, 12. This transformation written as

$$h_q(\hat{x}_q, \hat{y}_q) = \mathcal{R}_{\theta_x \theta_y \theta_z} \{s_q(x_q, y_q)\} \quad (4)$$

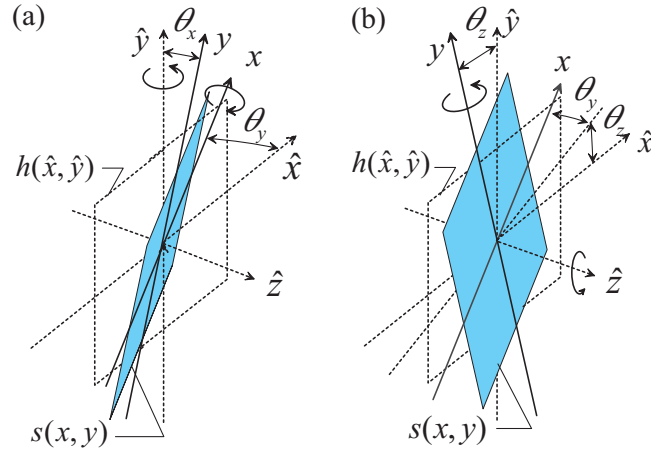


Figure 2. Two types of rotation upon two-axes; rotating $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ coordinates upon the \hat{y} -axis prior to the x -axis (a), rotating upon the \hat{z} -axis prior to the y -axis (b)

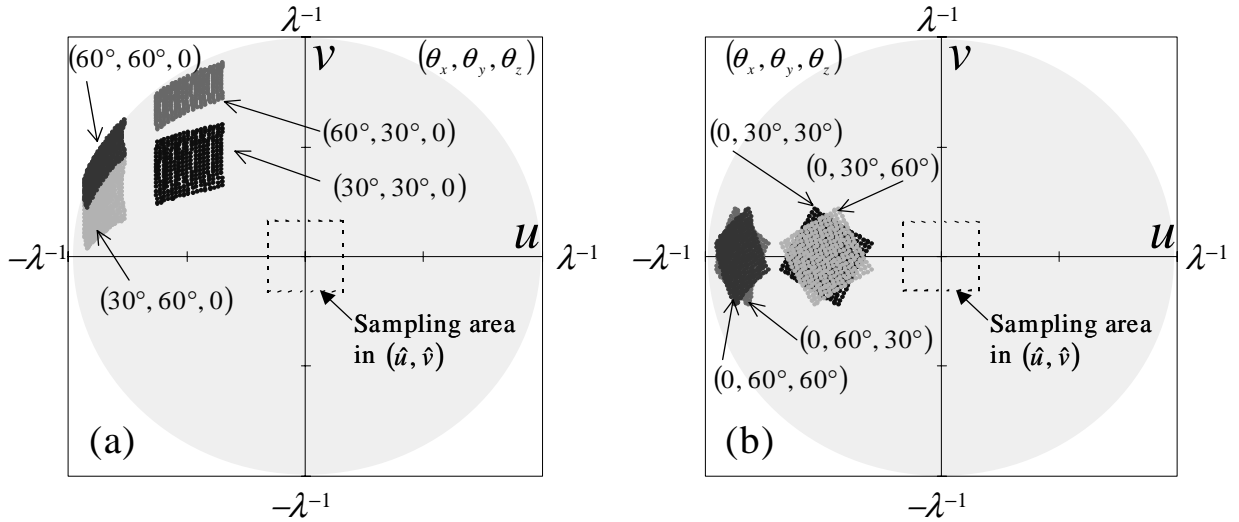


Figure 3. Distribution of sampling points in (u, v) . The rotation scheme in (a) and (b) agrees with that of Fig. 2.

where θ_x , θ_y and θ_z are rotation angles upon each axis. Finally, fields emitted from every plane are superimposed in the hologram plane as follows:

$$H(X, Y) = \sum_q h_q(\hat{x}_q, \hat{y}_q). \quad (5)$$

3. COORDINATES ROTATION ON TWO-AXES

There are several degrees of freedom to define local coordinates for each surface. Fig. 2, for example, shows two types of rotation on two-axes. In Fig. 2(a) the parallel local coordinates $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ is transformed into the local coordinates by rotating coordinates upon \hat{y} axis prior to x axis, while the coordinates is rotated upon \hat{z} axis prior to y axis in (b). When a position vector \mathbf{r} in the local coordinates is transformed into $\hat{\mathbf{r}}$ in the parallel local coordinates by transformation matrix T , the transformation is written as

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Tr}. \quad (6)$$

The inverse transformation matrix in the case indicated in Fig. 2(a) is given by

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}_x(\theta_x)\mathbf{R}_y(\theta_y) \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ \cos \theta_x \cos \theta_y & \sin \theta_x & -\cos \theta_x \sin \theta_y \\ -\sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x & \cos \theta_x \sin \theta_y \end{bmatrix}. \quad (8)$$

The inverse matrix for Fig. 2(b) is also given by

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}_y(\theta_y)\mathbf{R}_z(\theta_z) \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ \sin \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

Selection of these rotation schemes are not significant in the aspect of the mathematical transformation of coordinates, nevertheless one should carefully choose the rotation scheme, because an interpolation of Fourier spectrum is necessary for numerical calculation in the coordinates rotation. Since an object wave is typically sampled on an equidistant grid in the hologram plane, sampling points of the spectrum in (\hat{u}, \hat{v}) coordinates is also distributed on an equidistant grid within a square area, as shown in Fig. 3. The sampling points after any rotational transformation, however, are not positioned at even intervals, and its envelope does not shape square any longer. Fig. 3(a) and (b) shows distribution of sampling points in the local coordinates after rotating coordinates by using the way indicated in Fig. 2(a) and (b), respectively.

The rotation scheme in Fig. 2(b), described by matrix (10), is adopted in this report, because it seems that distortion of sampling distribution in Fig. 3(b) is rather less than that in (a). Jacobian necessary for rotational transformation by the matrix (10) (See Appendix A of Ref. 10) is given by

$$J(\hat{u}, \hat{v}) = \sin \theta_y \cos \theta_z \frac{\hat{u}}{\hat{w}(\hat{u}, \hat{v})} + \sin \theta_y \sin \theta_z \frac{\hat{v}}{\hat{w}(\hat{u}, \hat{v})} + \cos \theta_y. \quad (11)$$

4. OBJECT WAVES FROM THREE-DIMENSIONAL OBJECTS

Object waves emitted from 3-D objects can be synthesized by superimposing object waves emitted by planes constructing the object. A cube, for example, consists of three square planes*, as shown in Fig 4(a). An optical

*In this report we do not treat methods for removing hidden surfaces, and thus, such hidden surfaces are originally not taken into account.

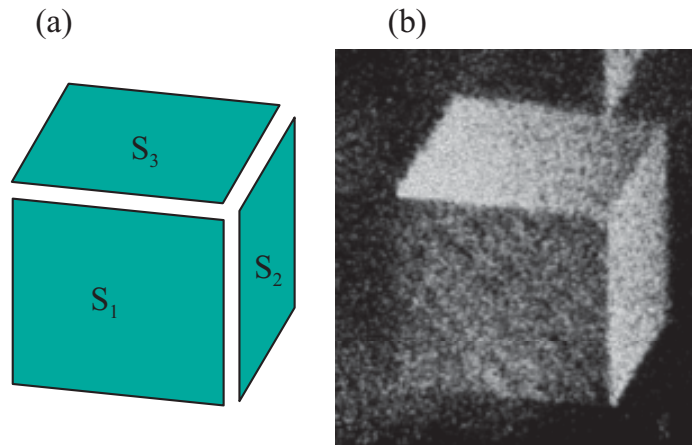


Figure 4. A cube built by plane surfaces (a) and an optical reconstruction of a fabricated hologram (b). The dimension of the cube is $6 \times 6 \times 6 \text{ mm}^3$.

reconstruction of a fabricated hologram of the cube is shown in Fig 4(b). A cube is optically reconstructed as expected, however the cube is shaded unexpectedly. All amplitudes of the surface property functions were a same constant, i.e. $a_q(x_q, y_q) \equiv a_0$, nevertheless the reconstructed cube has a definite shade. This shading is unexpected one and should be compensated in order to shade object accurately.

4.1. Numerical model for brightness of reconstructed surfaces

For compensation of the unexpected shading it is necessary to investigate which and how parameters of an object surface relate to brightness of the surface on reconstruction. Figure 5 is a theoretical model to predict brightness of a surface, represented by the sampled property function.

Suppose that the amplitude of a surface property function is a constant, i.e. $a(x, y) \equiv a_0$ and $|s(x, y)|^2 = a_0^2$ gives optical intensity on the surface. In that cases radiant flux Φ of a small area δA on the surface is given by

$$\Phi = \iint_{\delta A} |s(x, y)|^2 dx dy \tag{12}$$

$$= \delta A \sigma a_0^2, \tag{13}$$

where σ is the surface density of sampling. We assumed that almost the whole light emitted from the small area δA is bound in a solid angle given by

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{A}{r^2} = \frac{\pi(r \tan \varphi_d)^2}{r^2} \\ &= \pi \tan^2 \varphi_d, \end{aligned} \tag{14}$$

where φ_d is a parameter representing degree of the diffusiveness of the diffuser function $\Psi(x_q, y_q)$. Furthermore, assuming that light is diffused almost uniformly i.e. $d\Phi/d\Omega \simeq \Phi/A$, brightness of the surface, observed at angle of θ with the normal vector, is given by

$$\begin{aligned} L &= \frac{d\Phi/d\Omega}{\cos \theta \delta A} \\ &= \frac{\sigma a_0^2}{\pi \tan^2 \varphi_d \cos \theta}. \end{aligned} \tag{15}$$

As a result, brightness of the surface depends on the surface density of sampling, diffusiveness of the diffuser function, and amplitude of the surface property function. In addition, brightness varies dependently on the observation angle. This means that brightness of the surface changes according to the direction of the surface and causes unexpected shade.

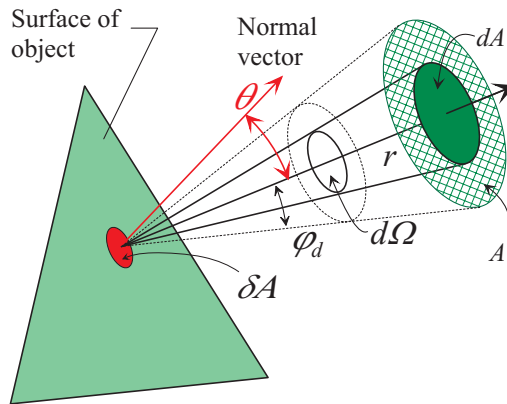


Figure 5. A theoretical model for predicting brightness of a planar surface represented by the surface property function.

A simple theoretical model is discussed so far, therefore Eq. (15) is only partially fit for brightness of optically reconstructed surfaces of real holograms. Since brightness given in Eq. (15) diverges in limit $\theta \rightarrow \pi/2$ and any actual hologram cannot produce infinite brightness for its reconstructed surface, Eq. (15) is not sufficient for the model used for compensation. To avoid the divergence of brightness in Eq. (15) we a priori introduced an angle factor $(1 + \gamma)/(\cos \theta + \gamma)$ instead of $1/\cos \theta$, i.e. supposed brightness is given as

$$L = \frac{\sigma a_0^2}{\pi \tan^2 \varphi_d} \frac{(1 + \gamma)}{(\cos \theta + \gamma)}, \quad (16)$$

where γ is a parameter that plays a role to avoid the divergence of brightness and prevent overcompensation as a result. The γ is dependent on actual methods to fabricate holograms such as encoding of object waves or property of recording materials and thus should be determined experimentally. Note that the angle factor in Eq. (16) is unity in $\theta = 0$ and $1 + 1/\gamma$ in $\theta = \pi/2$.

4.2. Compensation of brightness and shading object

Shading object is based on simple Lambert's law and the diffused reflection model. Brightness of a surface q , of which the normal vector is at an angle of $\hat{\theta}$ with the vector of illumination, is given by

$$L_q = L_0(\cos \hat{\theta}_q + l_e), \quad (17)$$

where l_e is the ratio of surrounding light to illuminated one and L_0 is brightness in $\hat{\theta}_q = 0$ and $l_e = 0$. By substituting L_q in Eq. (17) into L in Eq. (16), amplitude a_q of a surface q is given as follows:

$$a_q = A_0 \sqrt{\frac{(\cos \hat{\theta}_q + l_e)(\cos \theta_q + \gamma)}{1 + \gamma}}, \quad (18)$$

$$A_0 \equiv \sqrt{\frac{L_0 \pi \tan^2 \varphi_d}{\sigma}}. \quad (19)$$

Here, the observation angle θ is replaced by an angle θ_q formed between the surface q and the hologram.

5. OPTICAL RECONSTRUCTION OF FABRICATED HOLOGRAMS OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS

Digitally synthetic holograms were fabricated by a special purpose printer for drawing holograms. Parameters used to synthesize object waves and fabricate holograms are summarized in Table 1.

Table 1. Parameters used to synthesize object waves and fabricate holograms.

Object and its surface property function	
Sampling pitch	$2 \mu\text{m} \times 2 \mu\text{m}$
Dimensions	$6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ (cube) 8 mm in diameter (hexagonal pyramid)
Distance from hologram	100 mm
Hologram	
Number of pixels	8192×4096
Pixel size	$2 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$
Reconstruction wavelength	632.8 nm
Coding	Point oriented multi-level amplitude
Reference wave	Plane wave with incidence angle of 4°

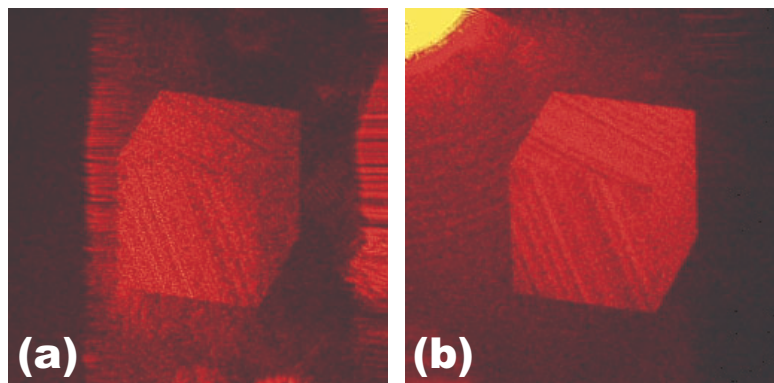


Figure 6. Optical reconstructions of cubic objects without illumination. Brightness of each surface is compensated in $\gamma = 0$ (a) and 0.5 (b)

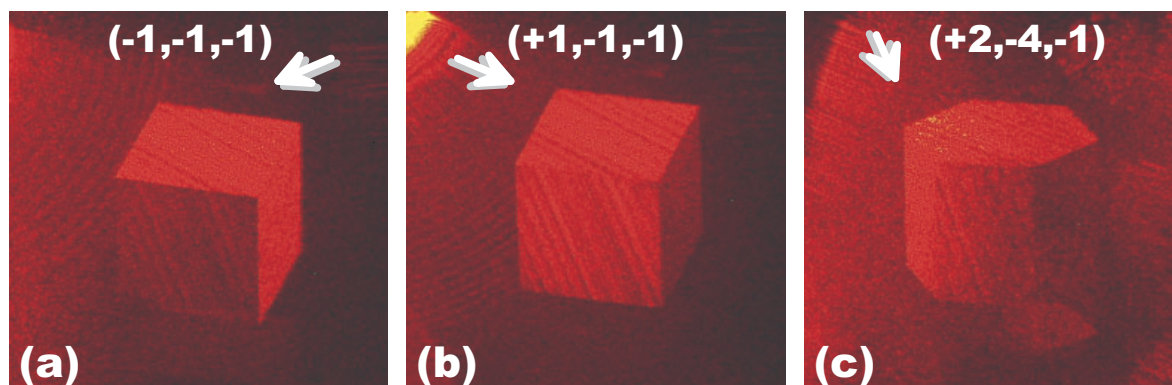


Figure 7. Optical reconstructions of 3-D objects shaded with illumination light; cubes illuminated from the upper right in $l_e = 0$ (a) and the upper left in $l_e = 0.7$ (b), and a hexagonal prism $l_e = 0.5$ (c). Brightness of every object is compensated in $\gamma = 0.5$. An arrow and figures in parenthesis indicates the illumination vector.

Firstly several holograms of cubic objects without illumination light was fabricated to determine the value of the parameter γ . Figure 6(a) shows optical reconstruction of a hologram with $\gamma = 0$. In contrast to Fig. 4(b), the surface placed at a large angle with the hologram is dark because of overcompensation caused by $\gamma = 0$. Figure 6(b) is also of a cubic object without illumination, but of which brightness is compensated in $\gamma = 0.5$. Differences of brightness disappear because of proper compensation of brightness, and borders between surfaces are no longer found out.

Figures 7(a)-(c) shows optical reconstruction of 3-D objects shaded by illumination light, of which brightness is all compensated in $\gamma = 0.5$. As was expected by arrows indicating illumination vectors in the figures, object surfaces are shaded in the reconstruction.

6. CONCLUSION

A detailed method for two-axes rotation of plane surfaces has been presented. Object waves emitted from three-dimensional objects composed of several rotated planes were digitally synthesized and reconstructions of the fabricated hologram were demonstrated. Furthermore, the surface brightness dependent on the observation angle as well as its compensation was discussed.

ACKNOWLEDGMENTS

Authors acknowledge S. Yamanaka and H. Miyauchi for their assistance in fabricating holograms.

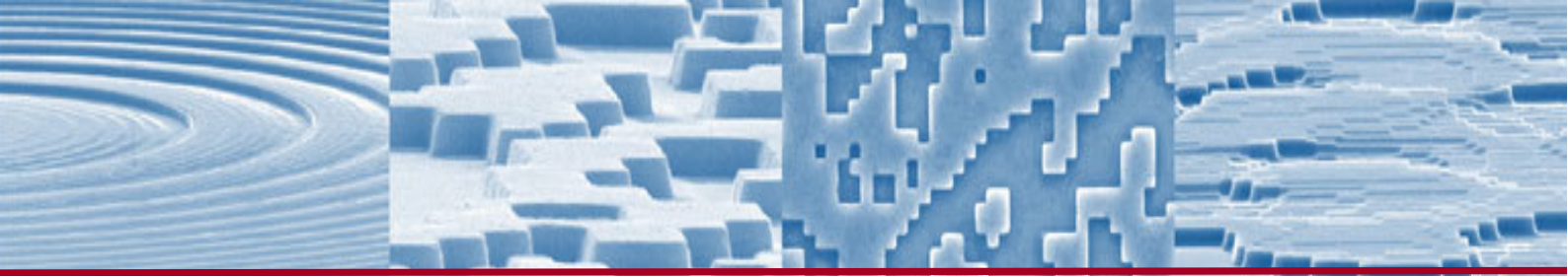
REFERENCES

1. J. P. Waters, “Holographic image synthesis utilizing theoretical methods,” *Appl. Phys. Lett.* **9**, pp. 405–407, 1966.
2. A. D. Stein, Z. Wang, and J. J. S. Leigh, “Computer-generated holograms: A simplified ray-tracing approach,” *Computers in Physics* **6**, pp. 389–392, 1992.
3. M. Lucente, “Interactive computation of holograms using a look-up table,” *J. Electronic Imaging* **2**, pp. 28–34, 1993.
4. J. L. Juárez-Pérez, A. Olivares-Pérez, and R. Berriel-Valdos, “Nonredundant calculation for creating digital Fresnel holograms,” *Appl. Opt.* **36**, pp. 7437–7443, 1997.
5. A. Ritter, J. Böttger, O. Deussen, M. König, and T. Strothotte, “Hardware-based rendering of full-parallax synthetic holograms,” *Appl. Opt.* **38**, pp. 1364–1369, 1999.
6. T. Ito, T. Yabe, M. Okazaki, and M. Yanagi, “Special purpose computer holography HORN-1 for reconstruction of virtual image in three dimensions,” *Comput. Phys. Commun.* **82**, pp. 104–110, 1994.
7. T. Ito, H. Eldeib, K. Yoshida, S. Takahashi, T. Yabe, and T. Kunugi, “Special purpose computer for holography HORN-2,” *Comput. Phys. Commun.* **93**, pp. 13–20, 1996.
8. K. Matsushima and M. Takai, “Recurrence formulas for fast creation of synthetic three-dimensional holograms,” *Appl. Opt.* **39**, pp. 6587–6594, 2000.
9. H. Yoshikawa, S. Iwase, and T. Oneda, “Fast computation of Fresnel holograms employing difference,” *SPIE Proc. Practical Holography XIV and Holographic Materials VI* #3956, pp. 48–55, 2000.
10. K. Matsushima, H. Schimmel, and F. Wyrowski, “New creation algorithm for digitally synthesized holograms in surface model by diffraction from tilted planes,” *SPIE Proc. Practical Holography XVI and Holographic Materials VIII* #4659, pp. 53–60, 2002.
11. R. Bräuer, F. Wyrowski, and O. Bryngdahl, “Diffusers in digital holography,” *J. Opt. Soc. Am.* **A8**, p. 572, 1991.
12. K. Matsushima, H. Schimmel, and F. Wyrowski, “Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes using the angular spectrum of plane waves,” (to be published).

Annexe D

Datasheets

Les datasheet de la caméra CCD et du SLM se trouvent dans les prochaines pages.



APPLICATION NOTE

HDTV Phase Panel Developer Kit
P/N: HEO 1080 P

Last Modified Date: 09. March, 2005
Revision status: 03

This document is subjected to change without notice.

HOLOEYE Photonics AG
Albert-Einstein-Str. 14
D-12489 Berlin, Germany

Tel: +49 (0)30 6392-3661
Fax: +49 (0)30 6392-3662
www.holoeye.com

Table of content:

Introduction 3
 Scope of Supply 3
 General Usage Guidelines 5
 Connecting the display 5
 Power up sequence..... 6
 HOLOEYE software package 6
 Phase and intensity modulation properties 7
 Display Specifications 7
 Measurement setup..... 7
 Polarization settings 8
 Complex modulation measurement data 8
 Measurements at 633 nm..... 8
 Measurements at 808 nm and preliminary measurements at 980 nm..... 8
 Optical flatness of the panel 9
 Compensated panel flatness 9
 Diffraction efficiency 11



HOLOEYE Photonics AG
 Albert-Einstein-Str. 14
 D-12489 Berlin
 contact@holoeye.com
 www.holoeye.com



Introduction

The purpose of this document is to list out some common issues that the user of this phase panel developer kit should be aware of.

The kit is used to control a reflective display (LCoS - Liquid Crystal on Silicon) with a resolution of 1920x1080 pixels. The signal is addressed via DVI (Digital Visual Interface) by a PC's graphics card. We suggest to connect the Phase panel developer kit to the DVI-interface of the graphics card, which is part of the kit, and an analog monitor (most CRT from 19" will do the job or HDTV TFT displays) to the analog interface to see the optical function in the graphics cards "clone mode".

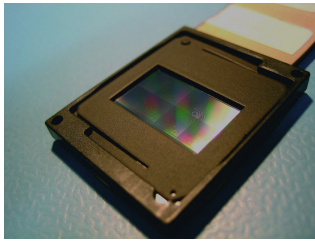
Please note, all phase function (gratings, phase masks, holograms, etc.) are addressed by the DVI graphics card. You are using the device as an "external monitor" with your computer. So, all optical functions are refreshed with the graphics card refresh rate (60Hz) and your desktop is showing the addressed optical function instantaneously. It's so easy!

We tested the following models: Nvidia Quadro FX 1100 / FX 1400, ATR Radeon 9550

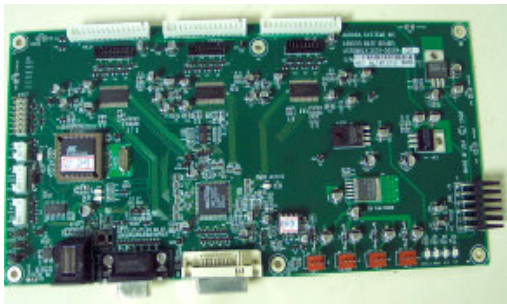
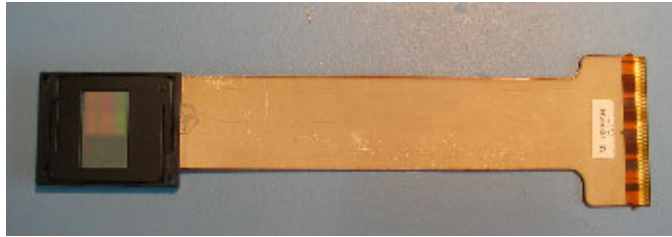
Scope of Supply

- #1 Phase only panel incl. flex
 - #2 Input board
 - #3 Output board
 - #4 Power supply
 - #5 RS232 adaptor
 - #6 Double-head graphics card (DVI-out and VGA-out)
 - #7 DVI cable
 - #8 CD with GUI software
 - #9 DB9 RS232 cable
 - #10 Phone cord
 - #11 I²C connector
- and this application note

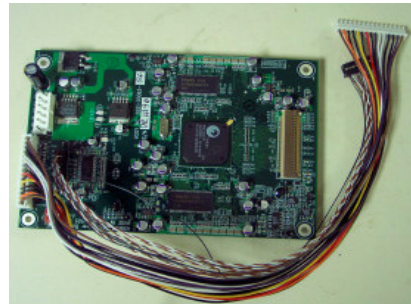




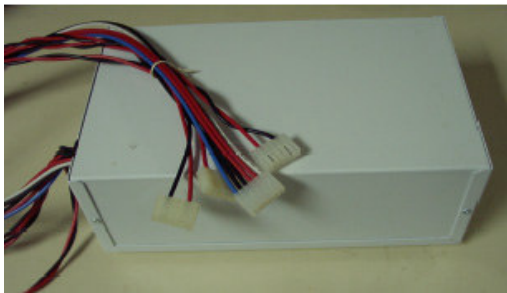
#1 LCoS Phase only panel



#2 Input Board



#3 Output Board



#4 Power Supply



#5 RS232 Adaptor



#6 Double-head graphics card



#7 DVI cable



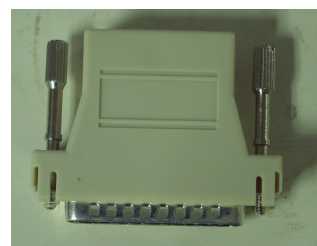
#8 CD with GUI software



#9 DB9 RS232 cable



#10 Phone cord



#11 I²C connector

General Usage Guidelines

- The assembly of the hardware has to be done on an antistatic workstation in order to avoid damages on the boards and or the display. All plugs of electrical interfaces especially the display to board connection has to be done without applied voltage. Even if the DVI is hot plug capable we recommend to boot the PC after connecting the board.
- Do not use the phase panel developer kit outside buildings and in humid or dusty places.
- Keep the kit away from extreme heat and cold as it may cause damages. In operation the display and driver become warm. Take care for sufficient ventilation, and keep the devices away from heat such as heating radiators, strong sun light, etc.
- If you plan to illuminate the kit with powerful light sources, we strongly recommend consulting HOLOEYE services.
- If water or some other liquid is spilled over parts of the kit serious damages can occur. Please disconnect the device immediately from the power supply in such cases and consult HOLOEYE services.
- Avoid touching the LCD because this might cause damages or reduce its optical quality.

Connecting the display

- User should connect the imager on the output board with the “golden pins” facing UP (see figure 1). (The connectors are limited in the contact durability. Hence, often disconnection and connection should be avoided. All components have to be connected under zero voltage conditions)

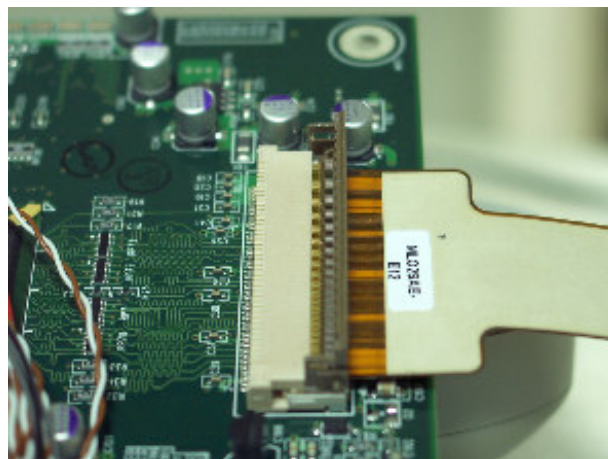


Fig. 1: Connecting the display

- The DB9 connector on the main board is not a RS232 connector. RS232 is not required in normal operation.

- Monitor with native resolution of 1920x1080 at 60 Hz vertical refresh rate or above is recommended with this kit for easy maneuver.
- Graphics card that supports 1920x1080 @ 60 Hz is needed. The DVI output needs to be activated by using the „Clone“-Function. This can be normally done under „Advanced“-settings under the menu point „Display-Properties“

Power up sequence

- Connect all components:
 - Output board to input board (2 cables), Green Channel!
 - Microdisplay to output board,
 - Power supply to input board and output board,
 - DVI cable to input board and PC
 - Power cord to the power supply
 - I²C connector to PC's parallel port
 - Phone cord to I²C connector
 - Do not connect the phone cord to the main board!!
- Turn on PC.
- Turn on the power supply. The desktop should already be displayed

At this point you can already use the device. For advanced optical settings and changing the electro-optical response you can use the HOLOEYE GUI software.

- Now connect the phone cord to the main board
- Run HOLOEYE's driver software, for details see manual
- If there is no display or the display disappears, unplug the phone cord from the main board, then press the reset button on the main board which is located next to the phone cord connection. When the display returns connect the phone cord back to the main board.

HOLOEYE software package

The developer kit includes a "GUI software" and an "Application software".

The GUI software can be used to change geometrical settings and the electro-optical response e.g. by changing the gamma curve etc.

The Application software allows the computation of CGH's from user defined signals as well as the generation of elementary optical functions like different kind of gratings etc.

Please find more details like the complete user manual on the CD.



Phase and intensity modulation properties

Display Specifications

Description		Units
Active area dimensions	15.36 x 8.64 (0.7" diagonal)	mm
Screen aspect ratio	16 (H) : 9 (V)	
Display resolution	1920 (H) x 1080 (V)	pixels
Display Resolution (addressable)	1952 (H) x 1088 (V)	pixels
Pixel pitch	8.0	μm
Pixel configuration	Orthogonal	
Phase Levels	256 (8 bit)	
0 th order intensity	60	%
Aperture ratio	> 87	%
Optical Mode	Reflective	
Liquid crystal type	Nematic (ECB-mode)	
Max. refresh frame rate	60	Hz
Illumination (max)	< 2	W/cm ²

Tab. 1: Quick reference data for HDTV phase-only LCOS

Measurement setup

Figure 1 shows the experimental setup for phase and amplitude modulation measurements.

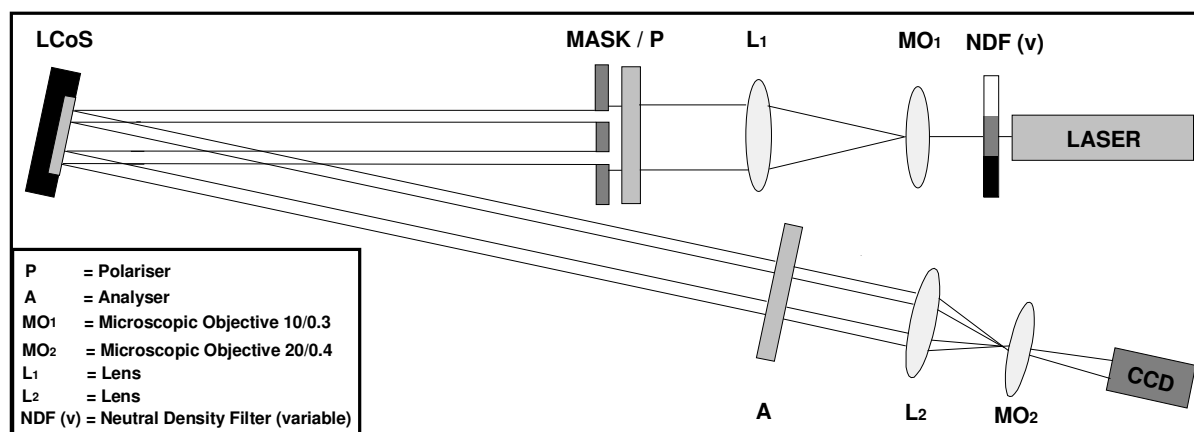


Fig. 2: Experimental setup for phase and (slightly modified) amplitude modulation measurements

This two beam interference set-up consists of a neutral density filter, 2 polariser, a double hole mask, 4 lenses and a CCD camera. The polarisation of the expanded and collimated laser beam can be adjusted by a polariser or a $\lambda/2$ wave plate in case of a pre polarised source. The mask creates 2 coherent beams which are guided to the LCoS display that is separated into two parts (one part gets a stable signal and the other part is successively addressed by gray level from 0 to 255). These two beams will be reflected under a small angle whereas one beam is modulated by the LCoS display. The analyser chooses the output polarisation and the lenses let the beams interfere and image the interference pattern onto the CCD. A software written by HOLOEYE evaluates the phase shift introduced by the changing gray level of one display half (this software can be downloaded with a instruction manual from the download area of our homepage www.holoeye.com).

If the un modulated beam is blocked and the CCD camera is replaced by an intensity meter one can easily measure the intensity modulation of the SLM for certain polariser/analyser settings.

Polarization settings

The polarizer used for the HeNe-Lasers and the analyzer are calibrated in such manner that the 0° position blocks horizontally polarized light and transmits vertically polarized light. The direction of polarizer rotation is mathematically positive.

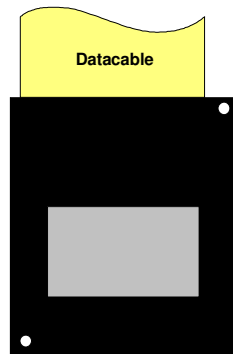


Fig. 3: Display orientation for the measurements

Complex modulation measurement data

The phase modulation was measured relative to a linear polarized reference beam by using a Michelson-Interferometer (see figure 2). The intensity modulation was measured with the same setup but with a blocked reference beam.

Measurements at 633 nm

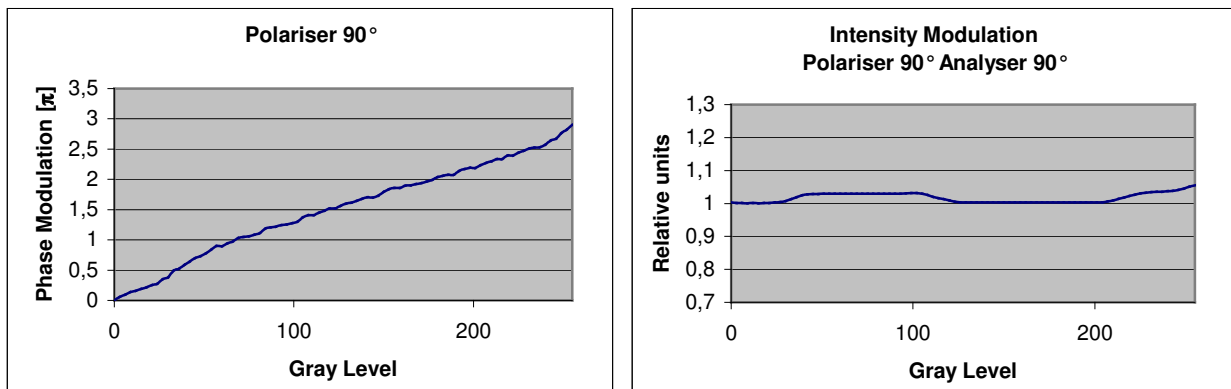


Fig. 4: Phase- and intensity modulation

Measurements at 808 nm and preliminary measurements at 980 nm

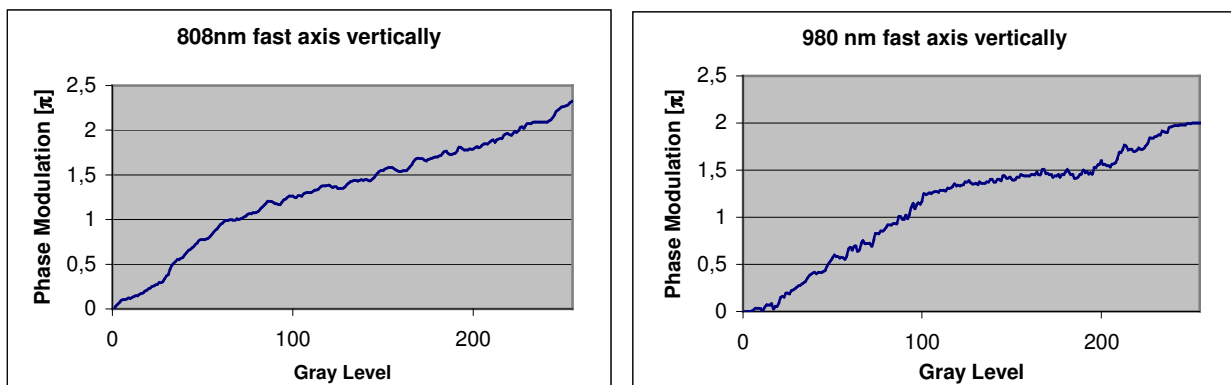


Fig. 5: Phase modulation at 808 nm and 980 nm



Optical flatness of the panel

All of the microdisplay technologies are not ideally optical flat. Translucent displays as well as reflective LCoS displays (nematic and ferroelectric) show a slight curvature. This in general not more than up to 3-4 waves at 633nm. For most of the applications this does not matter at all, since the deformation is almost spherical and superimposes a very weak lens function to the addressed optical function.

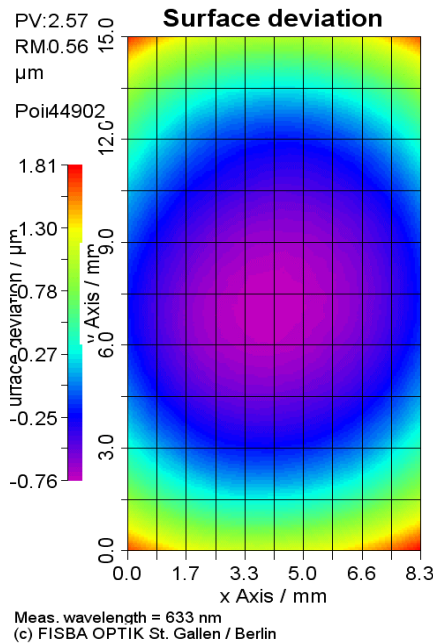


Fig. 6: Typical flatness of a phase LCoS

Due to fabrication also our HDTV phase LCoS-panel surface is not optically flat. The surface deformation is in general a spherical function as to be seen in Figure 5. Depending on the application this has a minor effect which can be completely compensated due to the phase-only modulation properties.

A compensation function can be superimposed to all addressed optical function to compensate this deformation (Figure 7).

Compensated panel flatness

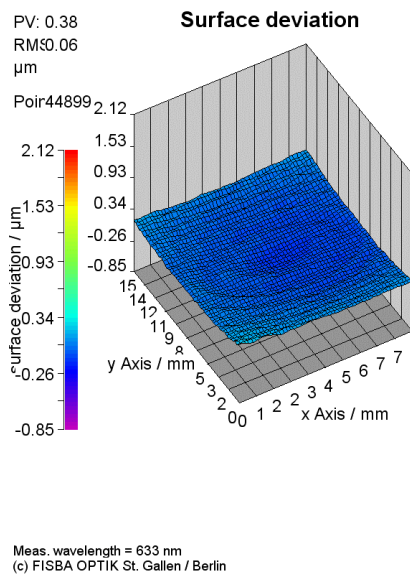
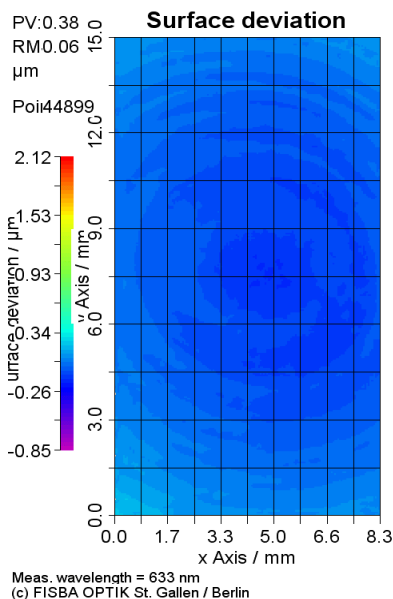


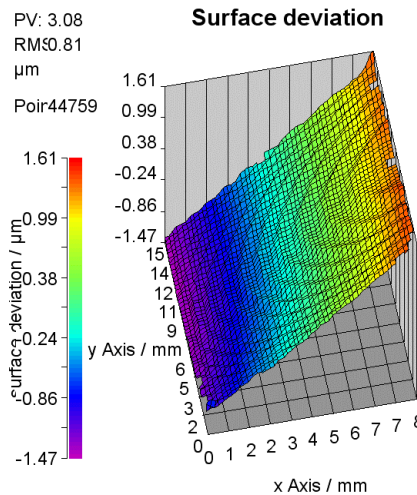
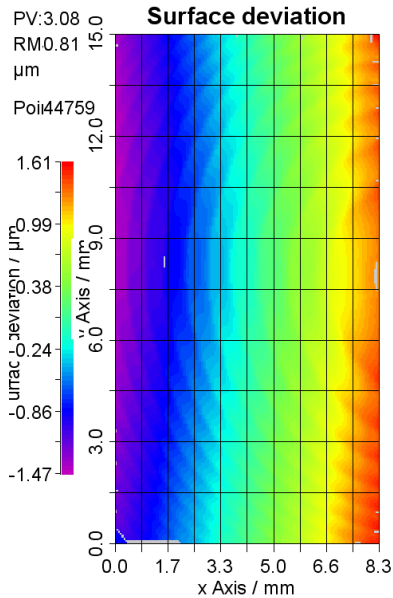
Fig. 7: Flatness measurements with addressed compensation function

With this compensation function, one is able to flatten the reflected wave front and superimpose all optical function to this compensation function. This has been proved by various customers already with HOLOEYE previous systems.

We could achieve a flatness of $\lambda/2 - \lambda/4$ for the HDTV-phase displays central area.

Examples of addressed phase functions with superimposed correction function.

1. Linear Phase ramp

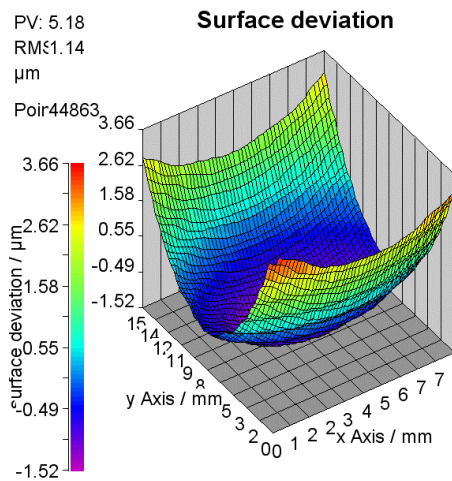
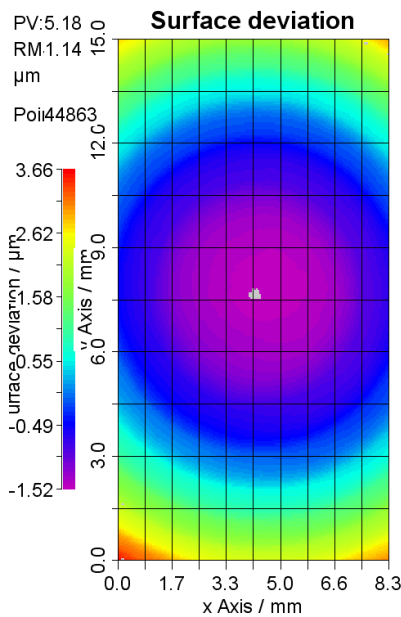


Meas. wavelength = 633 nm
(c) FISBA OPTIK St. Gallen / Berlin

Meas. wavelength = 633 nm
(c) FISBA OPTIK St. Gallen / Berlin

Fig. 8: Measurements with an addressed linear phase ramp

2. Spherical phase function (lens)



Meas. wavelength = 633 nm
(c) FISBA OPTIK St. Gallen / Berlin

Meas. wavelength = 633 nm
(c) FISBA OPTIK St. Gallen / Berlin

Fig. 9: Measurements with an addressed lens function



Diffraction efficiency

The lattice structure of the LCoS display itself leads to diffraction. The 0th order of the non-addressed display is around 60%.

The diffraction efficiency values see the 0th order intensities as a reference (100%). For the total light efficiency definition of the phase panel the factor needs to be considered.

Diffraction efficiency values were determined for binary (lattice parameter 3 pixel) and 8 level blazed gratings at 633nm. The diffraction efficiency for the blazed grating was measured with the default gamma curve and with an adapted one.

Please note, these values are preliminary measurements without any dc-optimization done.

Grating	I_{0th}	I_{+1st}	I_{-1st}
Binary (vertically)	6%	38%	38%
Binary (horizontally)	5%	40%	40%
8 level blaze (default)	8%	58%	3%
8 level blaze (adapted)	5%	74%	1%

Tab 2: Diffraction efficiency of addressed grating structures

DALSA 1M28/75/150-SA

Area Scan Cameras



Overview

A small, robust camera combining 1 megapixel resolution, high speed and "Stop Action" imaging.

Key Features

- "Stop Action" (SA) imaging
- 1 megapixel (1024 x 1024) resolution
- 27, 75 or 150 fps
- LinLog™ output response
- CMOS image sensor with ROI windowing ability
- Base Camera Link
- 8 bit output from 10 bit digitization

Programmability

- Configurable region of interest
- LinLog parameter adjustment
- Camera gain and skimming gain control
- Selectable camera mode operation

Typical Applications

- Robotics control
- Traffic management
- Welding inspection

The 1M28, 1M75 and 1M150-SA are ideal for industrial machine vision and traffic management. The cameras use a 1 megapixel (1024 x 1024), CMOS image sensor capable of running at up to 27, 75 or 150 frames per second at full resolution. Frame rates over 100,000 fps can be achieved through windowing.

Unlike regular CMOS imagers, our camera features an electronic global non-rolling shutter for "Stop Action" (SA) imaging, allowing for smear-free capture of fast moving objects. And its LinLog™ response allows up to 120 dB of intrascene dynamic range—making it ideal for outdoor exposures such as traffic at night.

Note: These cameras are ideally suited for robotics control, traffic management, and welding inspection. For applications requiring scientific image quality, such as high precision metrology, medical imaging, or microscopy, use a camera from our Pantera family.

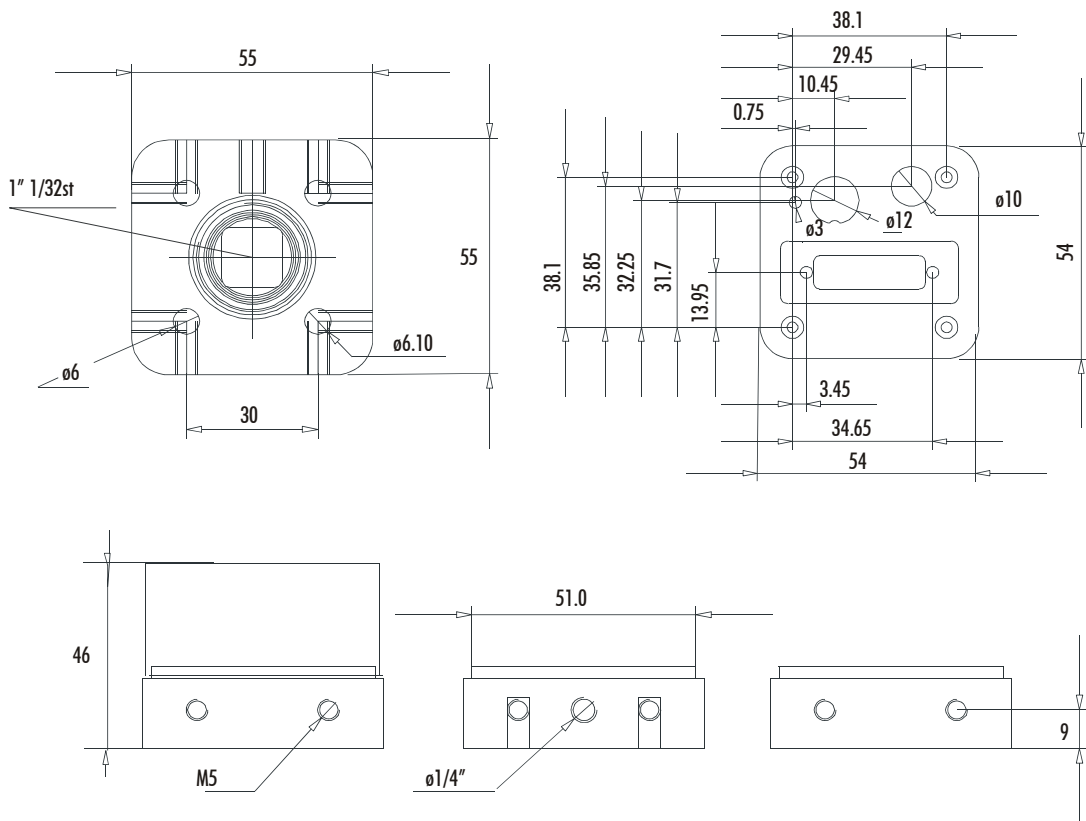
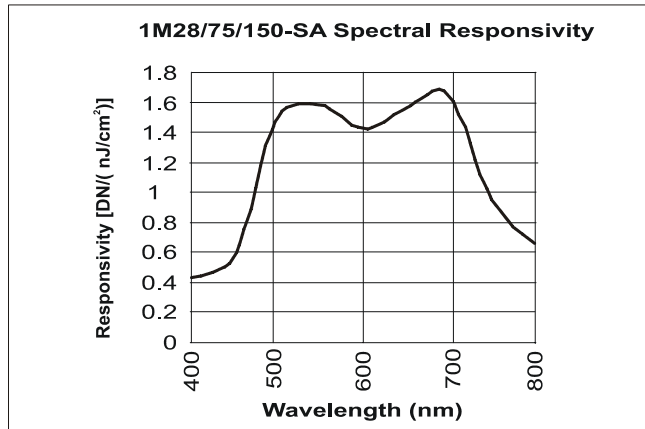
Specifications

Resolution	1024 x 1024
Data Rate	1 x 28 / 2 x 40 / 2 x 80 MHz
Max. Line/Frame Rate	27 / 75 / 150 fps
Pixel Size	10.6 μ m
Data Format	8 bit
Output	Base Camera Link
Lens Mount	C mount
Responsivity	Up to 11.2 DN/(nJ/cm ²)
Dynamic Range	48 dB Linear, up to 120 dB LinLog
Nominal Gain Range	1x, 4x, or 16x
Size	55 mm x 55 mm x 45 mm
Mass	220 g
Operating Temp	0 °C to 40 °C
Power Supply	5 V
Power Dissipation	<2 W
Regulatory Compliance	CE
Control	MDR26 Camera Link
Data	Shared with Control
Power	Binder 712
Example Part Number	DS-21-001M0150

DALSA 1M28/75/150-SA

Area Scan Cameras

DALSA's Stop Action cameras capture crisp images without smear or distortion by using short exposure times and electronically shuttering all pixels simultaneously.



All units in mm.

