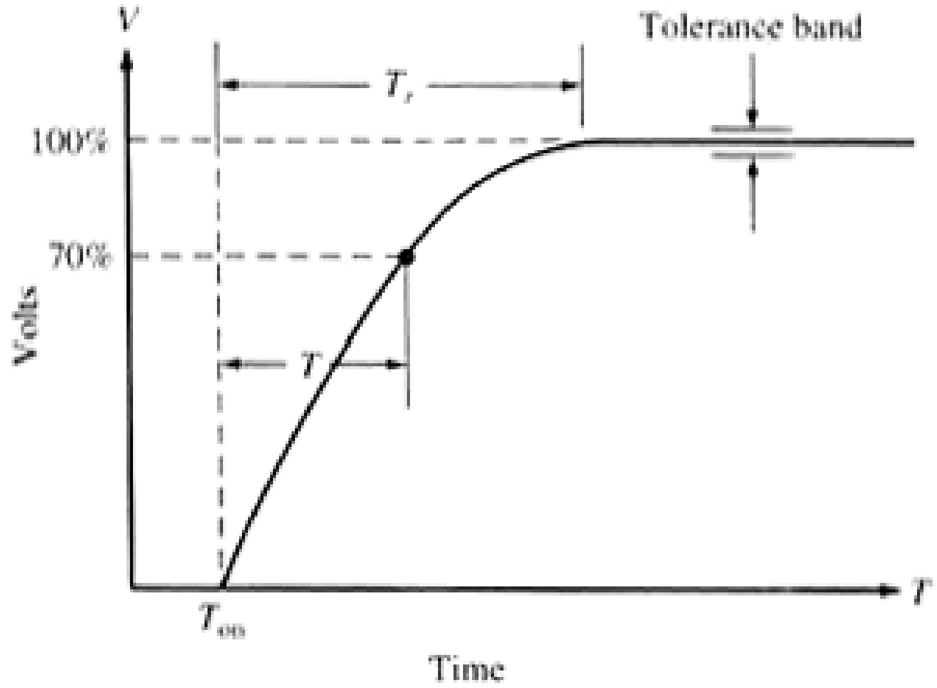
Réponse des instruments
(caractéristiques dynamiques)

Mesures dynamiques
Chapitre 8 du polycopié

- Jusqu'à maintenant, on ne s'est de fait intéressé qu'au régime permanent. Or il y a toujours un régime transitoire avant l'établissement de ce régime permanent. Il faut donc évaluer le temps au bout duquel ce régime transitoire devient négligeable.
- La rapidité est caractérisée par le temps que met le capteur à réagir à une variation brusque de la mesurande. Cependant la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à n% (souvent le temps de réponse à 5%).



Temps de réponse

- La connaissance du temps de réponse d'un capteur est un élément essentiel lors de la réalisation de mesurages. Il permet de déterminer au bout de combien de temps (pour une précision donnée) après un changement de mesurande la grandeur fournie par le capteur est **effectivement représentative** du mesurande.

- Ce chapitre montrera comment on peut estimer ce temps de réponse, dans quelques cas simples où il ne dépend que de l'instrument de mesure.

- Mais il faut insister ici sur les instruments de mesure auxquels il n'est parfois pas possible d'affecter en propre un temps de réponse, par exemple, les thermomètres ou les thermocouples.
- Le thermomètre mesure la température de son réservoir; il se met en équilibre avec le milieu à la faveur des échanges thermiques qui dépendent à la fois de la nature et de l'agitation au milieu, et de la surface et de la forme du réservoir.
- Un thermomètre plongé dans l'air calme atteindra son équilibre en quelques minutes alors qu'il lui suffira de quelques secondes s'il est plongé dans de l'eau courante.
- Donc le temps de réponse n'est pas entièrement déterminé par l'instrument de mesure, mais dépend considérablement des conditions expérimentales et de la nature même du phénomène étudié. Quand on trouve, par exemple, dans un catalogue le temps de réponse de thermocouples il faut se demander dans quelles conditions cela est valide.

Origine de la dynamique des instruments

Deux facteurs principaux sont à considérer, qui agissent conjointement:

1. **Les inerties**

2. **Les phénomènes de dissipation**

1. Inerties

Ce sont les inerties qui font que l'appareil de mesure tend à rester dans sa position actuelle et a besoin d'un apport d'énergie pour modifier son état; il s'oppose en quelque sorte à la mesure.

Les inerties se présentent comme des réservoirs d'énergie ou de matière, qu'il faut remplir, ce qui ne peut être instantané, car le débit est limité.

Suivant la nature des instruments et des grandeurs mesurées, ce peuvent être:

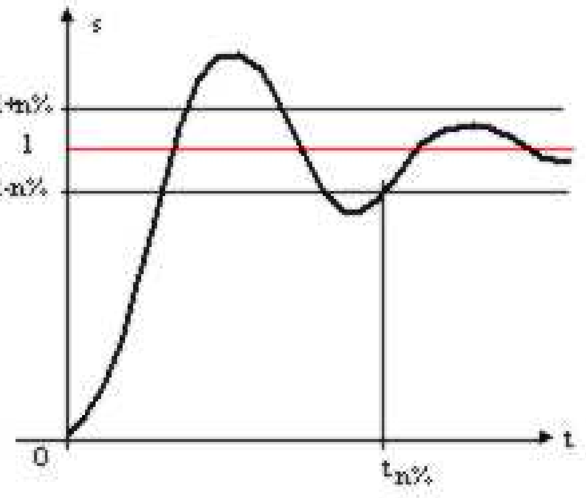
- les inerties **mécaniques**: la masse d'un accéléromètre, soumise à une accélération ne prend son mouvement que progressivement; de même, le cadre d'un galvanomètre, le volant d'une machine soumis à un couple constant, prennent un mouvement accéléré;
- les inerties **électriques**: le courant ne s'établit pas instantanément dans un circuit comportant soit une self-inductance dans laquelle il faut créer un champ, soit une capacité qu'il faut charger;
- les inerties **caloriques**: la température du réservoir d'un thermomètre ne s'élève qu'au fur et à mesure de l'apport des calories;
- les inerties **pneumatiques**: un réservoir, la capsule d'un manomètre par exemple, ne s'emplit que progressivement;
- les inerties **chimiques**: une réaction procède suivant une cinétique qui retarde son établissement.

2. Phénomènes de dissipation

- Ce sont les phénomènes qui dissipent l'énergie, véhicule de la mesure, et amortissent l'instrument.
- Ici encore, leur nature dépend des dispositifs expérimentaux. Ce peuvent être:
  - le frottement sec du pivot d'un cadre d'ampèremètre ou le frottement de l'axe d'un comparateur inductif;
  - le frottement visqueux, laminaire ou turbulent, de gaz ou de liquide, qui freine le plateau d'une balance ou le déplacement de l'aiguille d'un appareil de mesure électrique, ou encore l'écoulement du fluide dans un manomètre;
  - le frottement interne des solides, qui dissipe l'énergie liée à la déformation et joue un rôle important dans l'amortissement des vibrations;
  - la résistance électrique, qui dissipe en chaleur l'énergie électrique. Son action se manifeste fréquemment par l'intermédiaire des courants induits ou courants de Foucault, comme c'est le cas pour le cadre d'un galvanomètre ou le disque tournant d'un compteur d'électricité;
  - le rayonnement radioélectrique, calorifique, acoustique, qui disperse dans le milieu environnant l'énergie de la mesure;
  - la conduction thermique, qui laisse fuir les calories ou au contraire freine les échanges calorifiques.

Réponse dynamique d'un instrument

- Pour remonter de la mesure S(t) à la valeur du mesurande E(t), il faut obtenir une relation qui n'est autre que la réponse dynamique de l'instrument S(t)/E(t), tout comme la réponse statique était S_0/E_0.



- La connaissance du temps de réponse d'un capteur est un élément essentiel lors de la réalisation de mesurages. Il permet de déterminer au bout de combien de temps (pour une précision donnée) après un changement de mesurande la grandeur fournie par le capteur est effectivement représentative du mesurande.

- Pour remonter de la mesure $S(t)$ à la valeur du mesurande $E(t)$, il faut obtenir une relation qui n'est autre que la réponse dynamique de l'instrument $S(t)/E(t)$, tout comme la réponse statique était S_0/E_0.
- Assez généralement on considère aussi le rapport des deux quantités précédentes, soit:

$$r(t)=\frac{\dfrac{S(t)}{E(t)}}{\dfrac{S_o}{E_o}}$$

- qu'il convient d'appeler réponse dynamique normée, qui relie la **réponse dynamique** à la **réponse statique** prise comme référence, et qui a l'avantage de caractériser le comportement dynamique de l'instrument indépendamment de son comportement statique.

Réponse dynamique d’un instrument

- Lorsqu'un instrument de mesure fournit une grandeur de sortie qui varie suivant la loi $S(t)$, il est possible de calculer la variation simultanée de la grandeur d'entrée $E(t)$ si l'on connaît la réponse dynamique de l'instrument pour certaines lois particulières de variation de la grandeur d'entrée.
- La discussion qui suit s'applique au cas où le comportement dynamique d'un système peut être caractérisée par une équation différentielle linéaire, ce qui est très souvent le cas mais pas une généralité.
- Une telle équation se présente sous la forme:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + ... + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

- La variable $x(t)$ correspond au **mesurande**, la variable $y(t)$, à la **mesure réalisée** effectivement par l’instrument.
- Les coefficients $a_{\mathrm{n}}, \ldots . a_0$ sont des constantes.
- Le membre de gauche représente l'équation caractéristique de l'équation différentielle. Il contient des informations caractérisant la physique du système et la manière dont il répond quand il est excité.
- Le membre de droite représente le signal d'entrée, l'excitation.

- Ainsi les deux membres contiennent des informations indépendantes, d'un côté la caractéristique de transfert du système, de l'autre la fonction d'excitation appliquée.
- Les performances du système peuvent donc être obtenues théoriquement si l'équation différentielle linéaire non-homogène peut être résolue en fournissant la valeur de la sortie en fonction du temps.
- Comme les deux fonctions sont des expressions linéaires, elles peuvent toutes deux être converties en fonctions de transfert par la méthode de Laplace.
- Les systèmes d'ordre 0, 1 et 2 seront seuls pris en considération dans la discussion qui suit.
- Les fonctions de transfert unitaires typiques de ces systèmes sont alors, avec $s = j\omega$ et les paramètres τ qui sont des constantes de temps:

Ordre 0: $a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = 1$$

Ordre 1: $a_1 \dot{y} + a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$$

Ordre 2: $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = x(t)$ $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)}$$

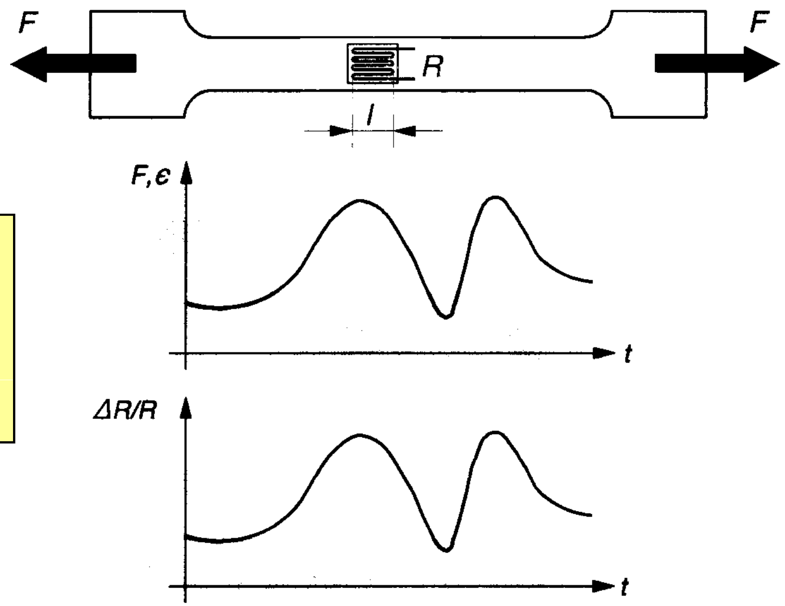
Instruments d'ordre zéro – temps de réponse = 0

- Le système d'ordre zéro ne peut pas introduire de déphasage ou de modification d'amplitude en fonction de la fréquence du signal appliqué.
- L'équation à la forme:

$$a_0 y = u(t)$$

- La forme d'équation montre qu'il n'y a pas de dérivées, signifiant que le système ne va pas altérer les caractéristiques temporelles d'une fonction dépendante du temps introduite en entrée.

Par exemple, une jauge de contrainte résistive, dans laquelle l'allongement provoque une modification proportionnelle de la résistance électrique, sans temps de retard appréciable, représente un système d'ordre zéro.



Instruments du premier ordre

- Un instrument du premier ordre est régis par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants:

$$\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

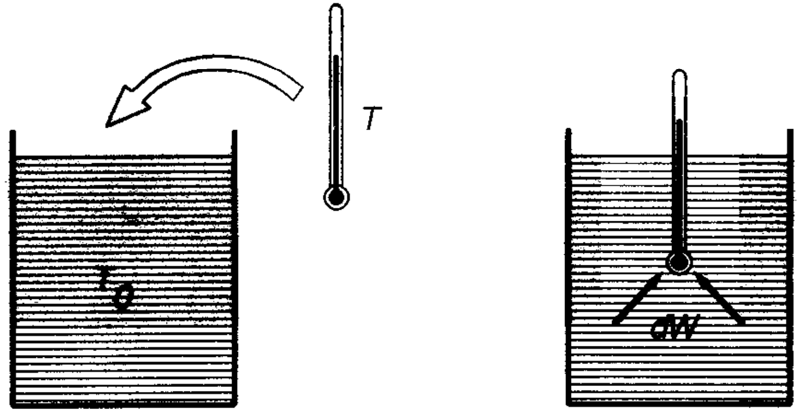
- La variable $u(t)$ correspond au mesurande, la variable $y(t)$ correspond à la mesure. Il faut noter que $y(t)$ et $u(t)$ sont des grandeurs de même dimension.

- La fonction de transfert en s est:

$$TF = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

où λ est une constante de temps.

Thermomètre



- Un thermomètre, plongé au temps t=0 dans un liquide à température T_0, il présente au temps t la température T.
- A cet instant, et dans l'intervalle de temps dt, il reçoit l'énergie:

$$dW = h \cdot (T_0 - T)dt \qquad (1)$$

où h est un coefficient d'échange, supposé constant.

L'énergie dW est utilisée à accroître la température du thermomètre de dT, soit:

$$dT = \frac{dW}{c} \qquad (2)$$

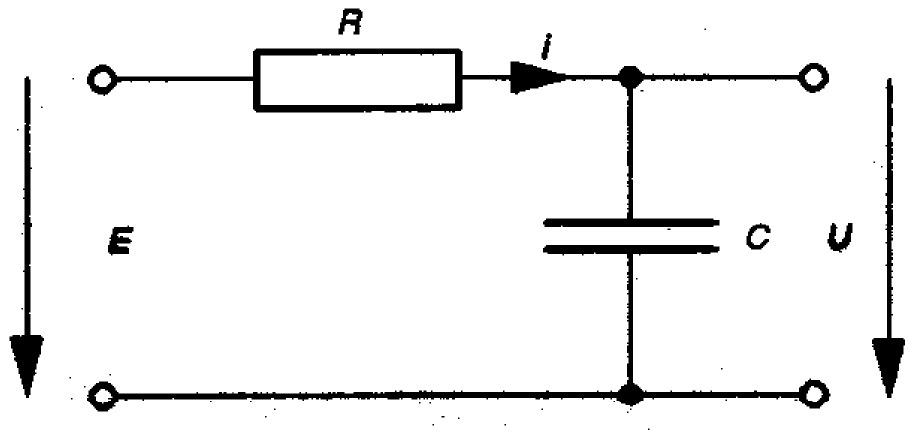
où c est la capacité calorifique du thermomètre.

- En éliminant dW entre (1) et (2) on a:

$$\frac{c}{h}\frac{dT}{dt} + T = T_0$$

qui correspond bien à l'équation d'un instrument du premier ordre.

Circuit RC



La tension *E* est mesurée par un appareil comportant une résistance *R* et une capacité *C* montées en série.
L'application de la tension *E* provoque l'apparition d'un courant i qui va charger le condensateur *C* selon la loi:

$$q = \int i \cdot dt = C \cdot U$$

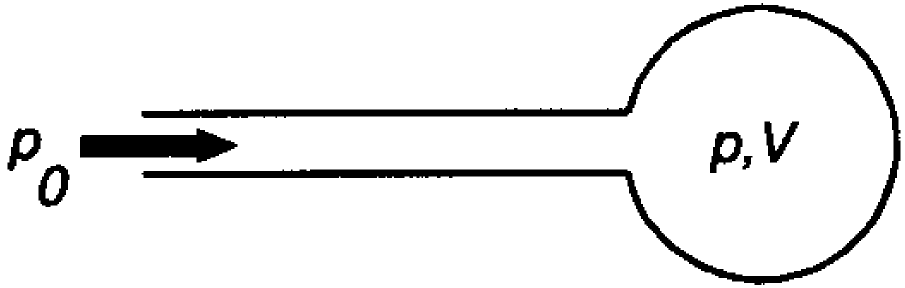
La valeur du courant i est obtenue en dérivant la charge par rapport au temps:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

Sachant que: $R \cdot i + U = E$ on obtient finalement:

$$RC \frac{dU}{dt} + U = E$$

Manomètre



Un manomètre mesure la pression p_0 à travers un tube de petit diamètre. L'énergie élémentaire fournie au manomètre pendant le temps dt vaut:

$$dW = k\,(p_0 - p)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

Elle est proportionnelle à la différence de pression, ce qui est exprimé au moyen du coefficient k, supposé constant, que nous appellerons coefficient de transfert.

La variation de pression dans le volume V de la capsule manométrique est:

$$dp = \frac{dW}{V} \qquad (2)$$

D'où, en éliminant dW entre (1) et (2):

$$\frac{V}{k}\frac{dp}{dt} + p = p_0$$

Réponse indicielle (*step response*)

- L'équation différentielle devient:

$$\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = E_0 U(t)$$

où E_0 est l'amplitude de l'échelon défini par la fonction de «saut» U(t).

- La solution de cette équation est:

$$y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} + B$$

- Dans le cas (particulier) òu

  $y = 0$ pour $t = 0$ et

  $y = E_0$ pour $t \to \infty$

on obtient:

$$\boxed{y(t) = E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)}$$

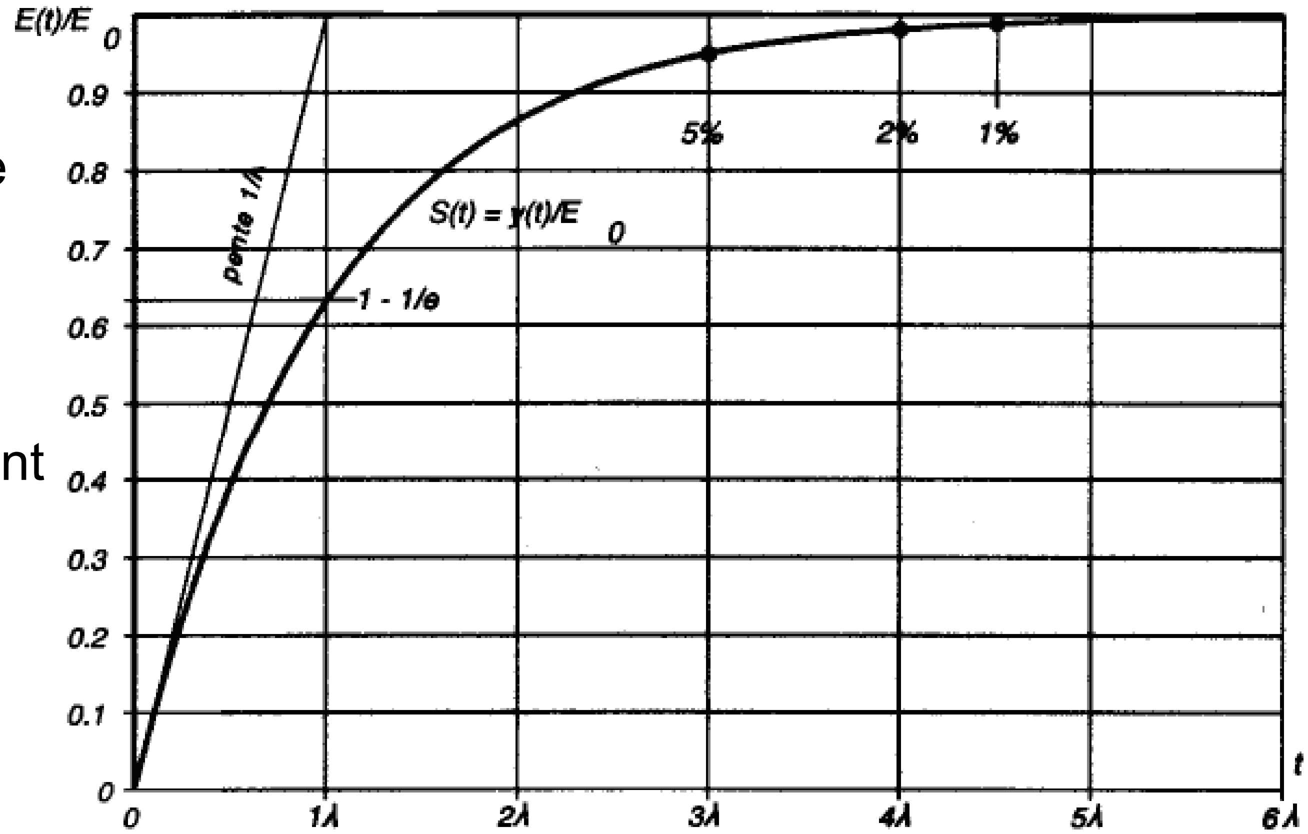
Constante de temps λ

- Dans l'équation différentielle

$$\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

la quantité λ a la dimension d'un temps.

- Elle est appelée constante de temps de l'instrument dont elle caractérise la vitesse de réponse.
- λ est en particulier le temps après lequel la réponse a atteint $1/e$ de la valeur d'équilibre.
- Aussi, la pente de la courbe à l'origine est $1/\lambda$.



- La constante de temps de l'instrument est facilement calculée si on a quelques paire de valeurs mesurées [t, $y(t)$] suite à a saut indiciel d'amplitude connue.

- Par exemple, dans le cas de y = 0 pour t = 0, et un saut d'amplitude E_o, λ est obtenue à partir de:

$$y(t) = E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

- ce qui donne:

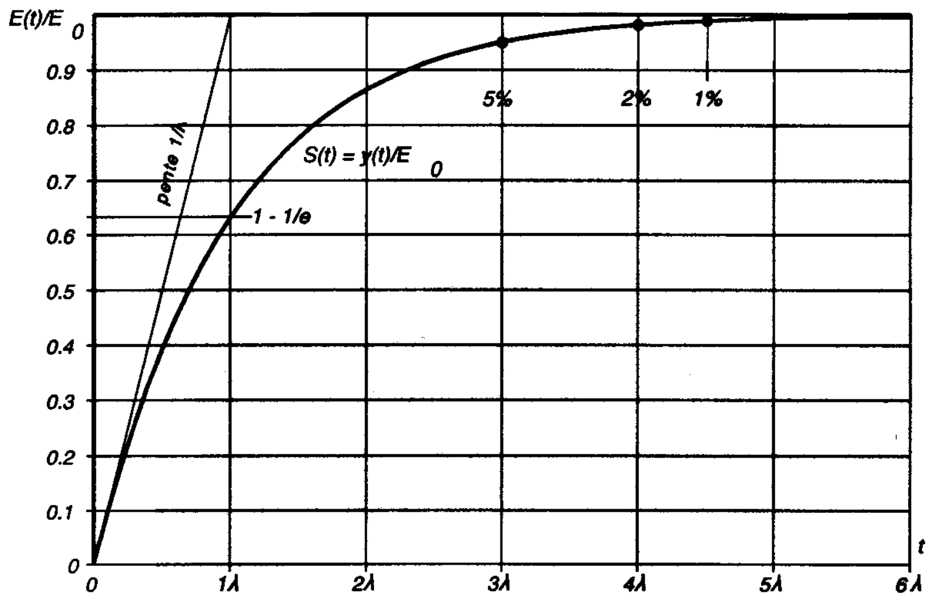
$$\boxed{\lambda = \frac{-t}{\ln\left(1 - \frac{y(t)}{E_0}\right)}}$$

- De manière analogue, si sont données $y(t)$, E_0 et λ, il sera possible de calculer le temps t auquel une valeur mesurée $y(t)$ sera atteinte:

$$\boxed{t = -\lambda \cdot \ln\left(1 - \frac{y(t)}{E_0}\right)}$$

Temps de réponse

- Dans la pratique, il est important de connaître le temps nécessaire pour que la grandeur de sortie soit à **x% près** de la valeur d'équilibre, qui est celle de la valeur correcte.
- Ce temps de réponse à x% près est une caractéristique qui vaut pour tous les instruments, indépendamment de toute correspondance avec une équation. La figure de la réponse indicielle montre les temps de réponse à 5%, 2% respectivement 1% près.



- Il ne faut pas confondre la constante de temps avec un retard pur. Le retard est un décalage τ dans le temps, qui fait que la grandeur de sortie à l'instant t dépend de la grandeur d'entrée à l'instant $(t - \tau)$.

Problème

- Un thermomètre est décrit par l'équation:

$$\lambda \frac{dy}{dt} + y = KU(t)$$

avec K = 1 div/°C et λ = 20 s.

- On suppose que la température de la pièce est de 21,1 °C et qu'elle correspond à celle du thermomètre à l'instant initial t = 0.
- Le thermomètre est placé dans la bouche d'un patient et qu'il indique 28,3 °C à l'instant t = 10 s.

- Déterminer la température du patient.

Problème

- Un thermocouple à la température ambiante de 21 °C est plongé brusquement dans un bain d'eau chaude dont la température est maintenue à une température constante de 60 °C.
- Déterminer la constante de temps du thermocouple si les températures relevées en fonction du temps sont les suivantes:

t [s]	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
T[°C]	21.0	35.5	46.0	51.5	54.0	56.0	58.0

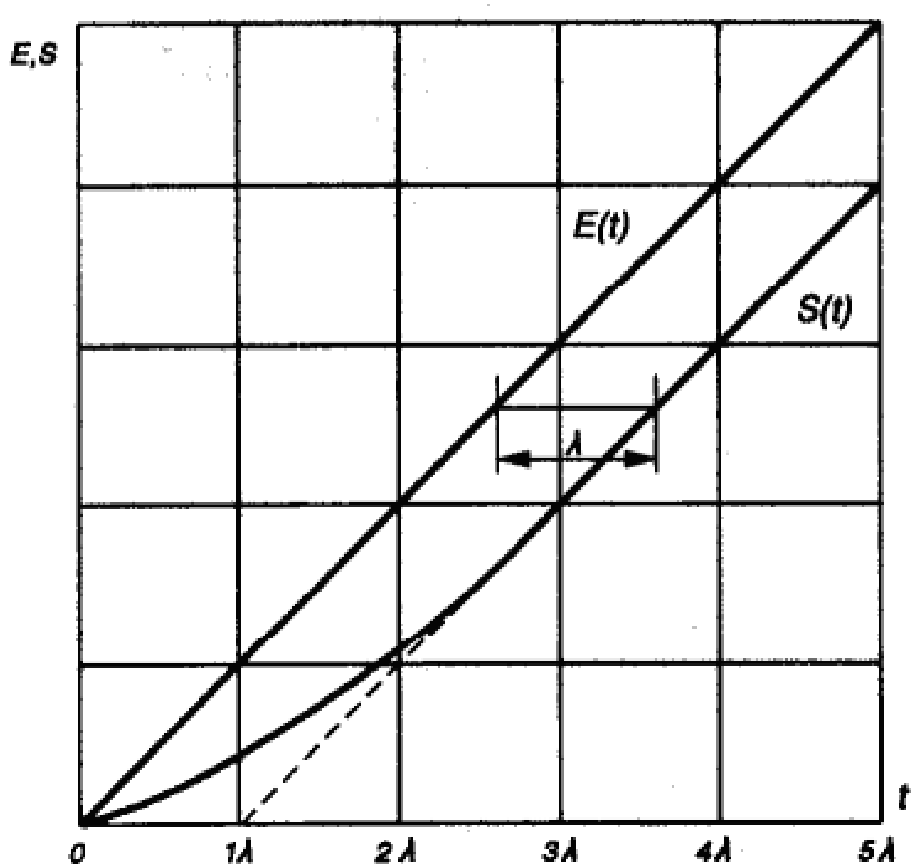
- Indiquer l'équation obtenue pour $T(t)$ et vérifier les valeurs de la tabelle au moyen de cette dernière.
- Déterminer à quel instant t la température de 59 °C est atteinte.

Réponse à un échelon de vitesse constante

- Dans ce cas, l'équation différentielle s'écrit:

$$\lambda \frac{dy}{dt} + y = A \cdot t$$

- L’instrument réagit à un échelon de vitesse avec une certaine inertie.
- Mais après un certain temps (environ 5 λ) la mesure évolue de manière complètement parallèle au mesurande avec un retard de λ.
- L'indication de l'instrument au temps t donne la valeur que le mesurande **avait** au temps $(t - \lambda)$



Problème

- Un ballon s'élève à la vitesse constante V = 6 m/s et il transporte un thermomètre dont la constante de temps est de 15 s.
- La température au niveau du sol est de 20 °C et la température atmosphérique décroît de 0,5 ° C pour 100 m d'élévation d'altitude.

- Quelle est l'altitude du ballon lorsqu'il indique 5°C ?

Réponse à un train d'impulsions

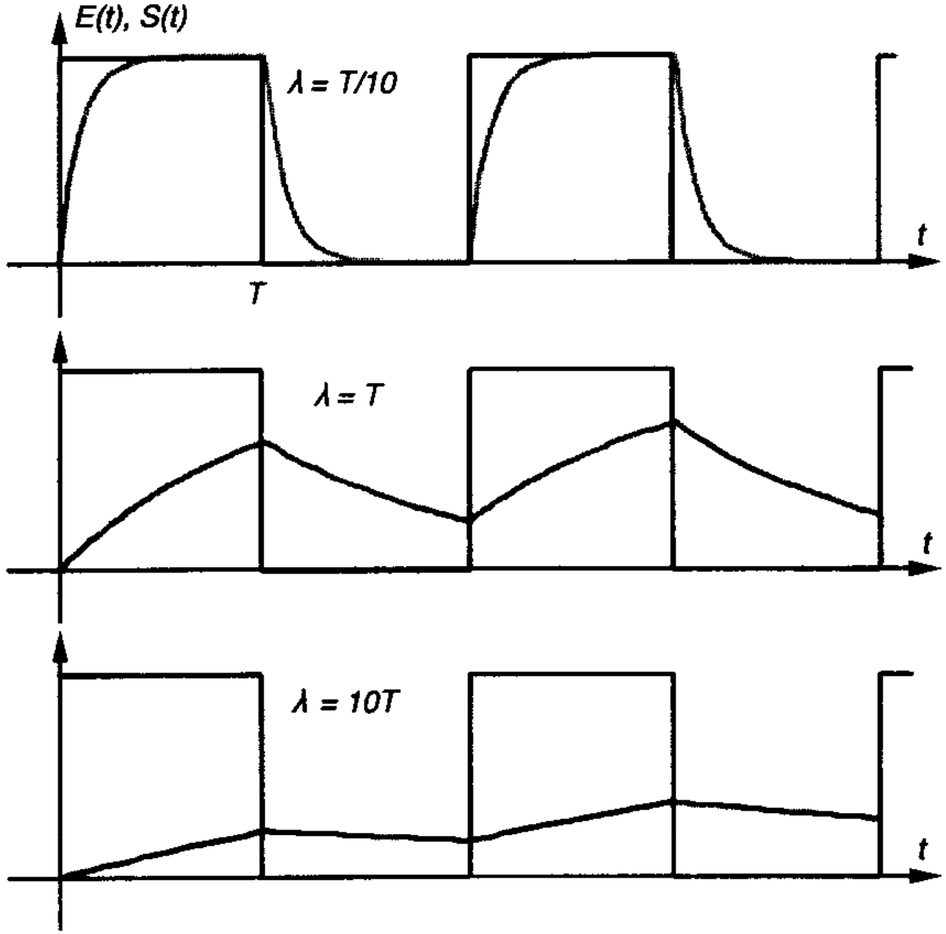
Supposons qu'on applique un signal rectangulaire à un instrument du premier ordre.

Selon le rapport λ/T, constante de temps λ sur demi-période, on obtiendra les réponses représentées sur le figures suivantes.

- Dans le premier cas, λ/T petit, le signal de sortie $S(t)$ est relativement peu déformé par rapport au signal d'entrée $E(t)$.
  L'amplitude maximale est atteinte.

- Dans le deuxième cas, λ/T=1, une distorsion importante apparaît, de même qu'un déphasage.
  L'amplitude maximale n'est plus atteinte.

- Dans le dernier cas, λ/T >> 1, l'amplitude de sortie est fortement réduite et le déphasage voisin de -90°.
  Le signal de sortie est pratiquement triangulaire.



Réponse à une excitation harmonique

Si on applique une excitation harmonique du type: $u(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

et que l'on considère la réponse en régime permanent, c'est-à-dire la réponse lorsque le régime transitoire a disparu, il faut trouver la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre:

$$\lambda \frac{dy}{dt} + y = E_0 \cos\left(\omega \cdot t)\right)$$

Cette solution est elle-même sinusoïdale, du type:

$$y(t) = y_0 \cos\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

avec:

$$y_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1+\lambda^2 \cdot \omega^2}}; \qquad tg\varphi = -\lambda \cdot \omega$$

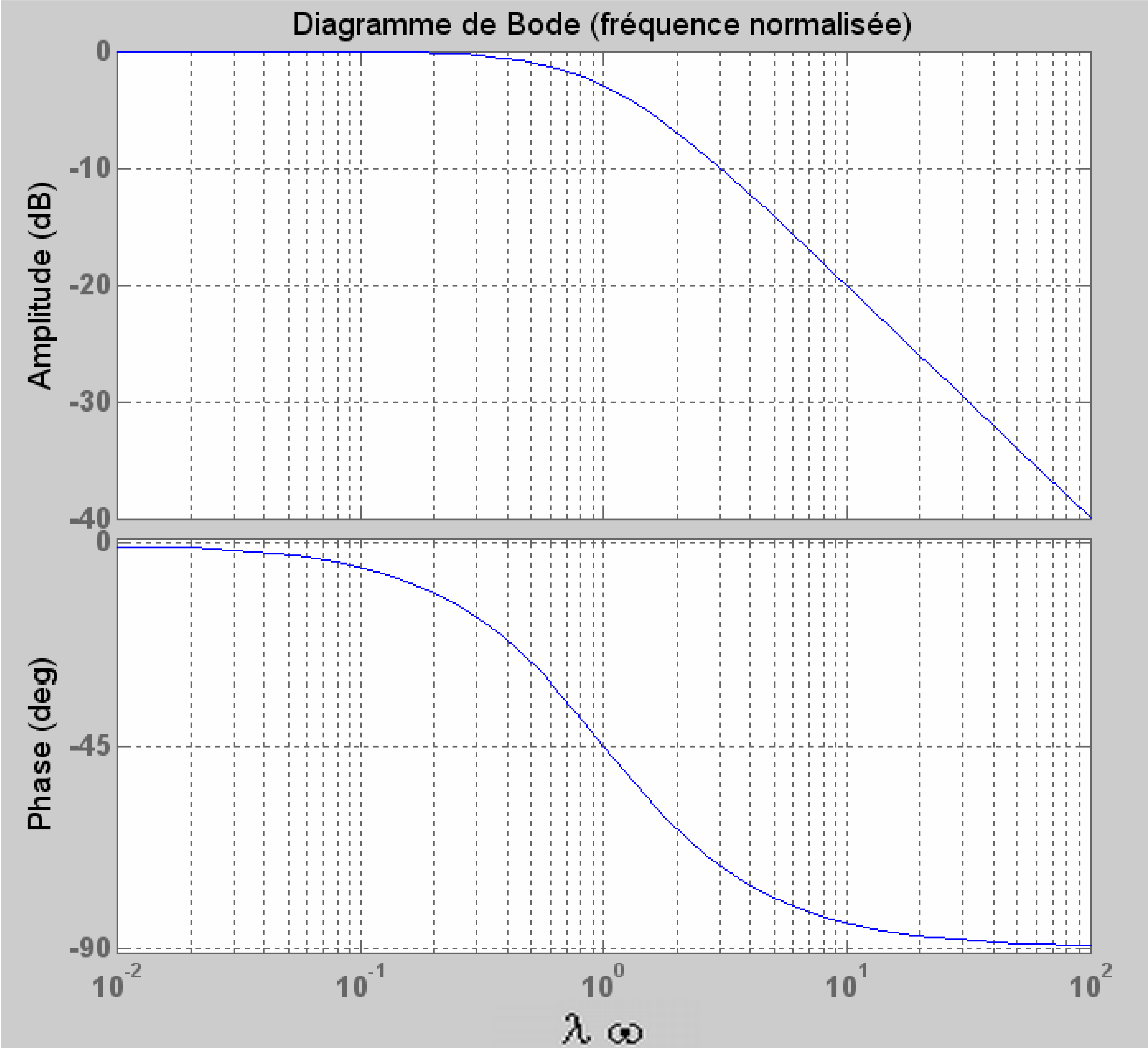
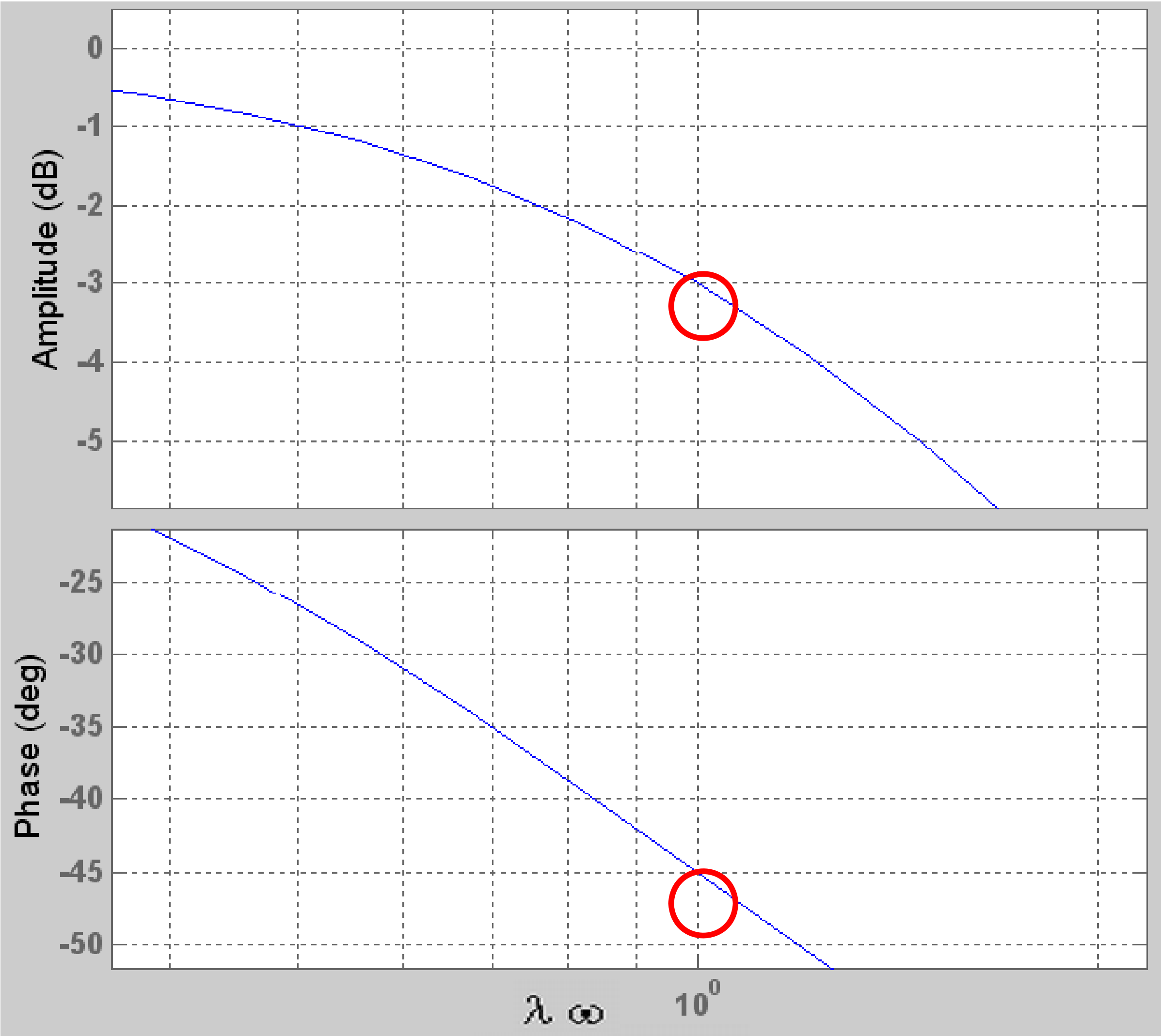


Diagramme de Bode (fréquence normalisée)
Amplitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
Phase (deg)
0
-45
-90
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
λ ω

Bande passante pour -3 dB

La bande passante d'un instrument ou capteur est définie conventionnellement comme la <u>fréquence à laquelle l'instrument à un gain de **-3 dB**</u> (~ 0.7 en amplitude relative – attention: ce sont des dB_{20} !)



La bande passante (-3dB) d'un instrument <u>du premier ordre</u> correspond à la fréquence:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\lambda} \qquad (rad/s) \\ f &= \frac{1}{2\pi\lambda} \qquad (Hz) \end{aligned}}$$

et à la phase de -45 deg

Exercice

- Un photoresistor (resistance photosensible) est donné avec un temps de montée de 30 ms, qu'on supposera correspondre à 3λ.

- Ecrire l'équation du capteur et formuler la fonction de transfert en s.
  1. Tracer avec Matlab le diagramme de Bode et la réponse indicielle.
  2. Evaluer la bande passante (Hz) à -3 dB.
  3. Vérifier le résultat en traçant la réponse sinusoïdale à cette fréquence.

Instruments du deuxième ordre

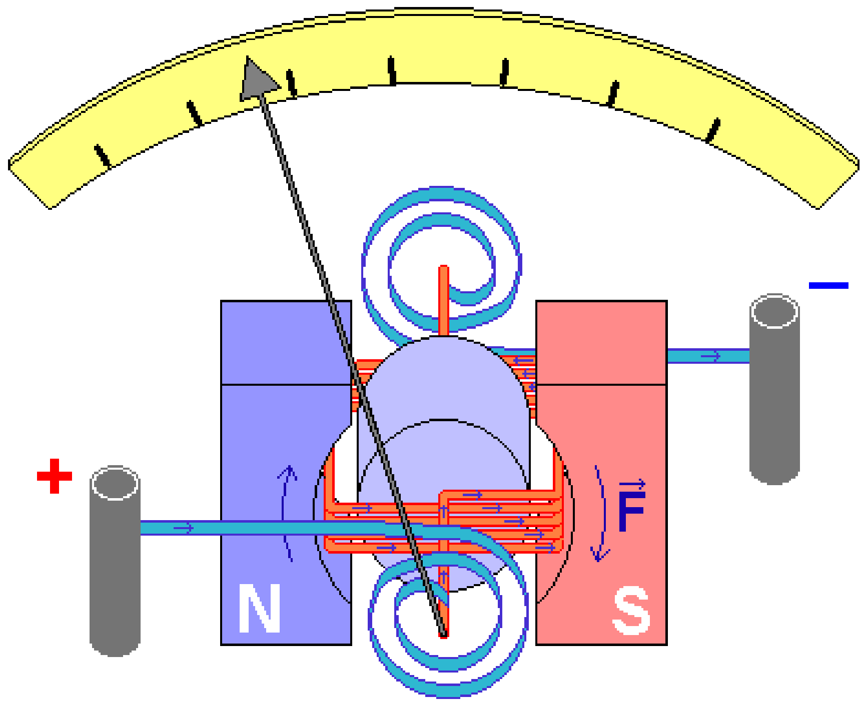
- Un instrument du premier ordre est régis par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

- La variable $u(t)$ correspond au mesurande, la variable $y(t)$ correspond à la mesure. Il faut noter que $y(t)$ et $u(t)$ sont des grandeurs de même dimension.

Galvanomètre à cadre mobile

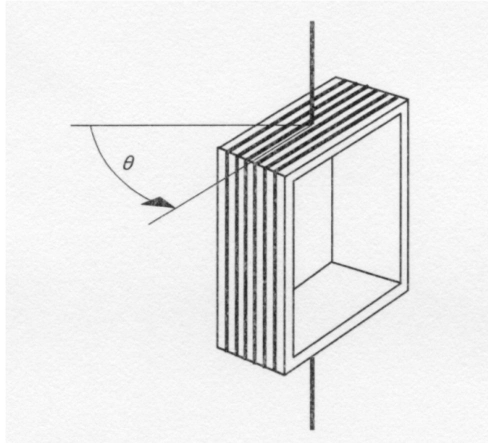
- Un galvanomètre à cadre mobile, appelé aussi magnéto électrique, ou mouvement d'Arsonval, est constitué d'une bobine montée sur pivot, baignant dans le champ magnétique d'un aimant fixe.
- Sur cette bobine est fixée l'aiguille de visualisation et un ressort chargé de rappeler l'équipage mobile dans la position indiquant le zéro.



  - La bobine de faible impédance est branchée en série dans le circuit où circule le courant à mesurer.
  - Le courant, en traversant la bobine, induit dans celle-ci un champ électromagnétique, ce qui provoque un pivotement par répulsion des champs magnétiques.
  - Plus le courant est intense plus la bobine bascule.

- Le galvanomètre est constitué d'un cadre mobile de moment d'inertie I et qui tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre.

  Ce dernier est alors rappelé par un couple élastique $\Gamma\theta$ produit par un système élastique (par exemple un fil de torsion).



- Le mouvement est freiné par des couples de frottement visqueux $\nu\,(d\theta/dt)$ proportionnels à la vitesse (viscosité, courants induits).
- L'instrument mesure le couple C, d'origine électromagnétique, qui lui est appliqué.
- L'application de la deuxième loi de la dynamique pour un mouvement circulaire

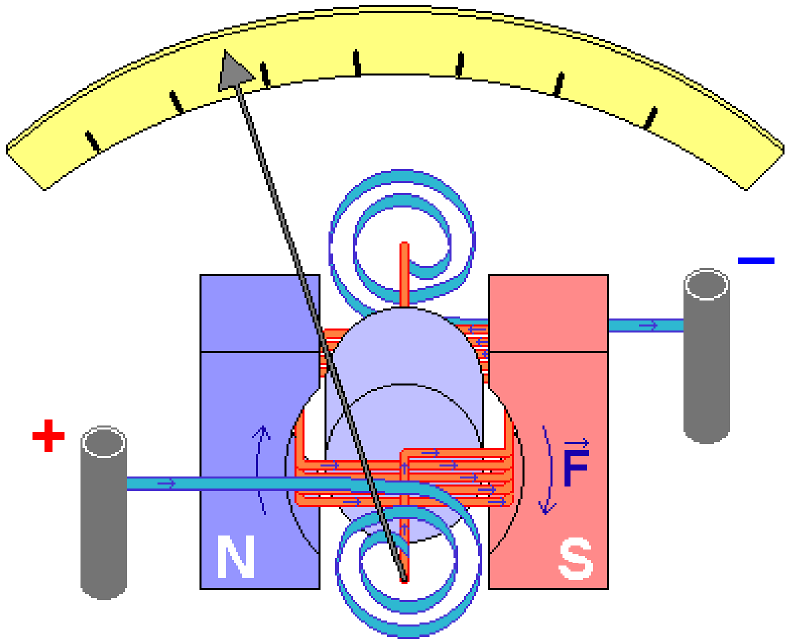
$$\sum M = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- donne ainsi:

$$C-\Gamma\cdot\theta-\nu\frac{d\theta}{dt}=I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

et donc :

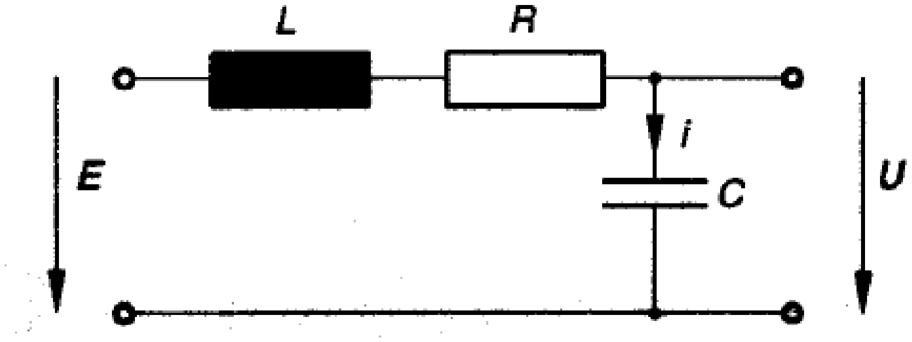
$$\boxed{I\frac{d^2\theta}{dt^2}+\nu\frac{d\theta}{dt}+\Gamma\cdot\theta=C}$$



Circuit RLC

Considérons un circuit constitué d'une self, d'une résistance et d'une capacité auquel nous appliquons la deuxième loi de Kirchhoff:

$U_L + U_R + U = E$



Les lois de l'électricité nous fournissent en ensemble de relations:

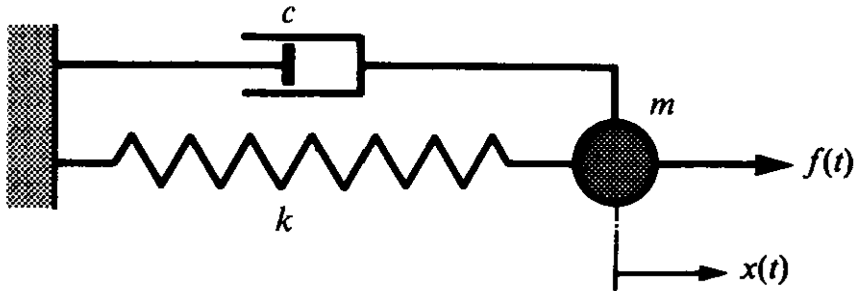
$U_L = L\dfrac{di}{dt}$ $\quad U_R = R \cdot i$ $\quad q = C \cdot U = \int i \cdot dt$ $\quad i = C\dfrac{dU}{dt}$ qui permettent d'aboutir à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants suivante:

$$\boxed{LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = E}$$

Système mécanique à 1 degré de liberté

- Régis par une équation du second ordre

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$



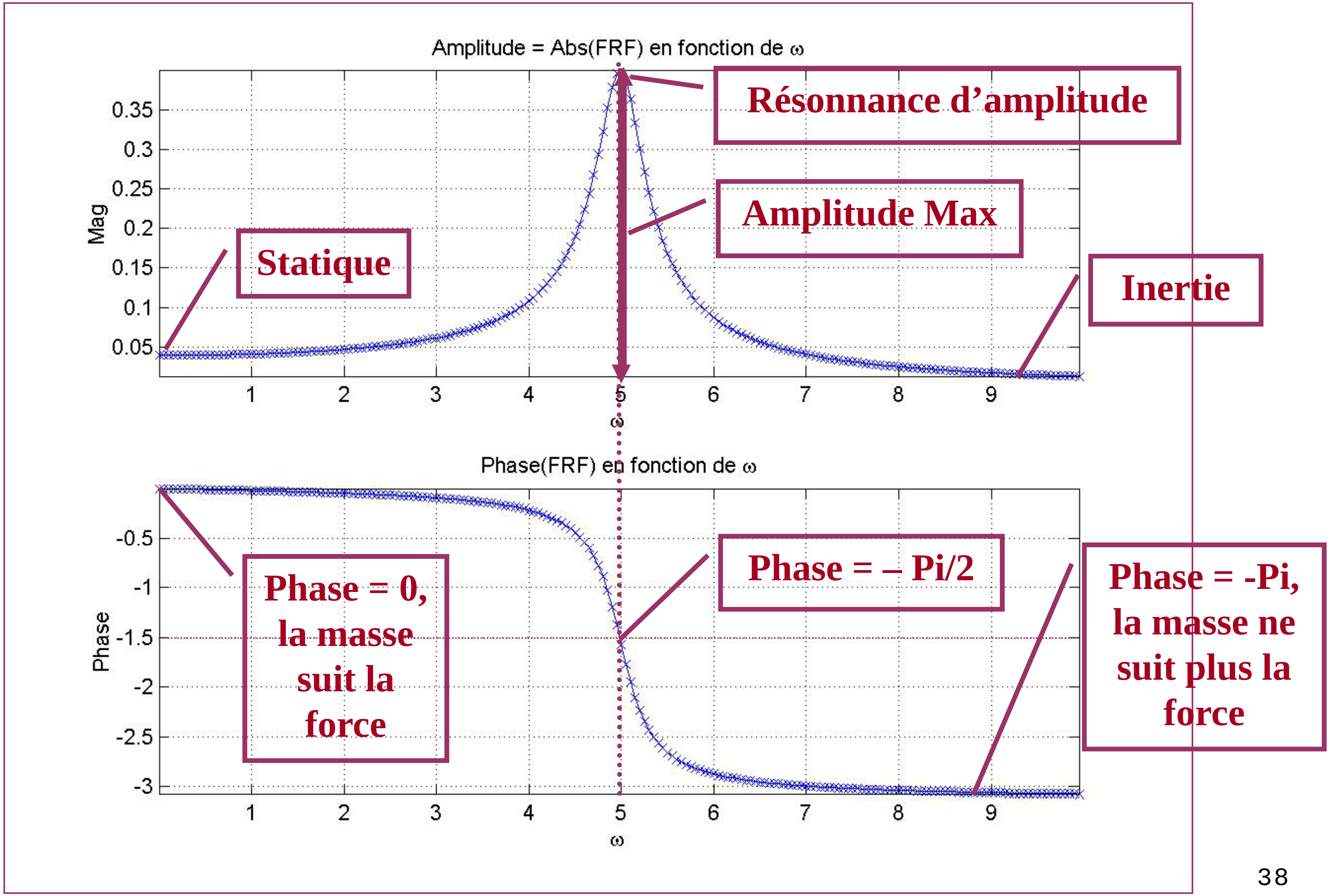
- qui peut être donc représentée sous une forme canonique par

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{f(t)}{m}$$

avec:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre (rad/s)

$\zeta = \frac{c}{2 m \omega_0}$ l'amortissement relatif (-)



Amplitude = Abs(FRF) en fonction de ω
Résonnance d'amplitude
Amplitude Max
Statique
Inertie
Mag
ω
Phase(FRF) en fonction de ω
Phase = 0, la masse suit la force
Phase = – Pi/2
Phase = -Pi, la masse ne suit plus la force
Phase
ω

L’équation des instruments de deuxième ordre

L'étude de l'équation

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (1)$$

conduit à définir quelques termes qui reviennent constamment dans les calculs.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

est appelé ***pulsation propre*** du système et $\omega_0/2\pi$ sa ***fréquence propre***.

De même s'introduit l'expression: $\zeta = \dfrac{a_1}{2 \cdot \omega_0 \cdot a_2} = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$

qui caractérise l'amortissement du système.
ζ est appelé ***coefficient d'amortissement***.

Avec ces notations et en divisant l’équation (1) par a_0, l'équation prend la forme:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Fonction de transfert

$$TF = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1}$$

Avec:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre (rad/s)

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$ l'amortissement relatif (-)

Fréquences propres et fréquences propres **apparentes** avec amortissement

- Fréquence propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

- Fréquence propre apparente : $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

Réponse indicielle (*step response*)

- L'équation différentielle devient:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_0}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=E_0\cdot U(t)$$

où E_0 est l'amplitude de l'échelon défini par la fonction de «saut» *U*(t).

- La solution de cette équation dépend du signe et de la valeur du discriminant: $\sqrt{\zeta^2-1}$

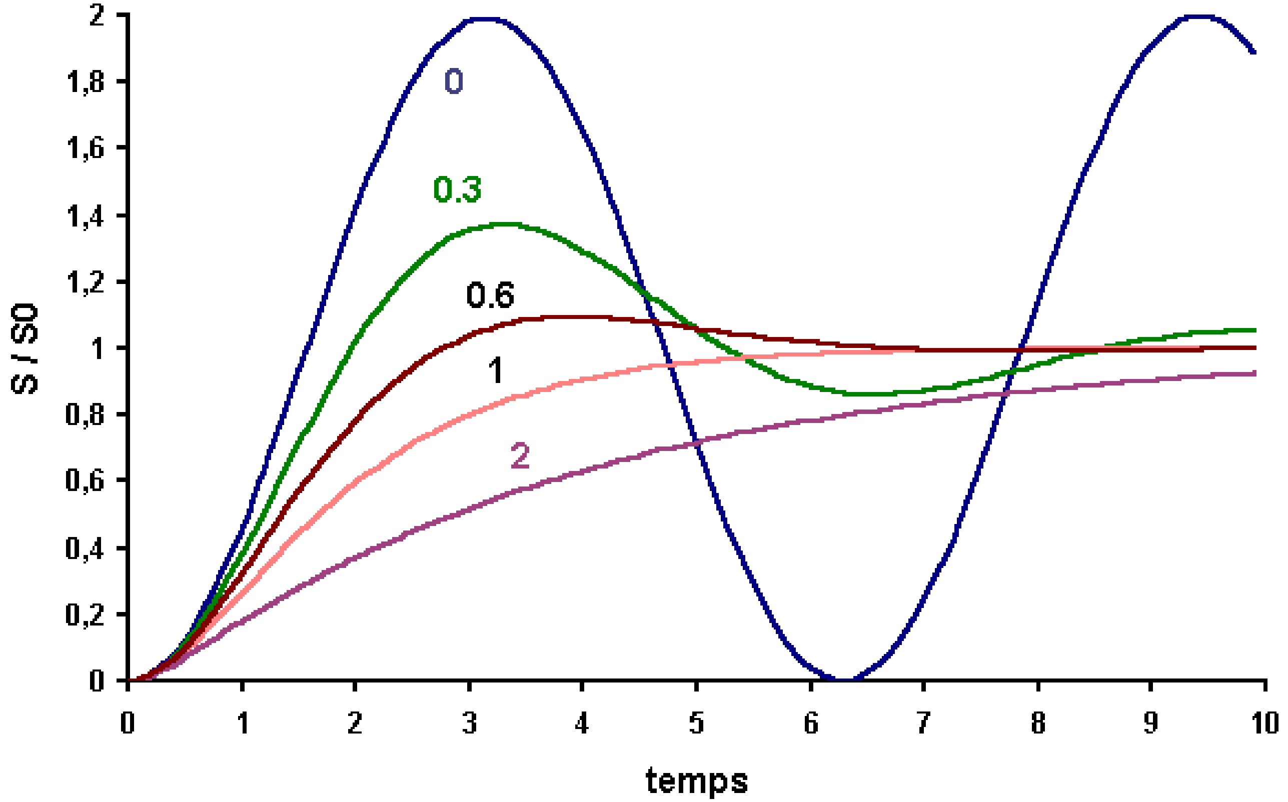
ce qui détermine trois type de solutions

1. ζ < 1 : régime périodique

2. ζ = 1 : régime critique

3. ζ > 1 : régime apériodique

Réponse à un échelon en fonction du coefficient d'amortissement ζ



- $\zeta < 1$: régime périodique
- $\zeta = 1$: régime critique
- $\zeta > 1$: régime apériodique

Réponse à un échelon en fonction du coefficient d'amortissement ζ

1) $\zeta < 1$ Faible amortissement. Le régime transitoire est une oscillation amortie de la forme :

$$s(t) = s_0\left[1 - \frac{\exp(-\zeta\omega_0 t)}{R}\sin(R\omega_0 t + \psi)\right]$$

où

$$R = \sqrt{\left|1-\zeta^2\right|} \quad \text{et} \quad \psi = \arcsin(R)$$

2) $\zeta = 1$ Amortissement critique. La réponse du système a pour équation :

$$s(t) = s_0\left[1 - (1+\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)\right]$$

3) $\zeta > 1$ Amortissement important. La réponse du système devient :

$$s(t) = s_0\left[\frac{R-\zeta}{2R}\left\langle \exp\{(R-\zeta)\omega_0 t\} - \exp\{-(R+\zeta)\omega_0 t\}\right\rangle + 1\right]$$

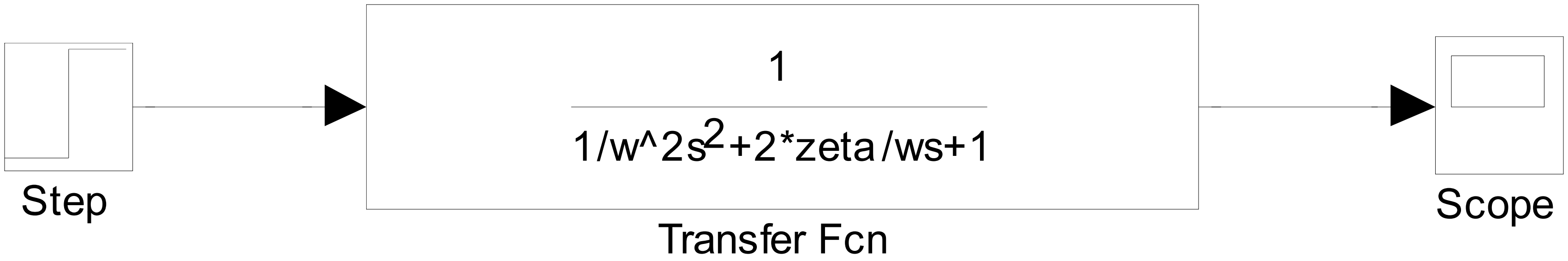
Le coefficient d'amortissement pour obtenir un temps de réponse optimale est compris entre 0.6 et 0.7.

1) $\zeta < 1$: faible amortissement, régime périodique
2) $\zeta = 1$: amortissement critique, régime critique
3) $\zeta > 1$: amortissement important, régime apériodique

Simulation par Matlab/Simulink

```
m = 0.1
c = 0.05
k = 1

w = sqrt(k/m)
zeta = c / (2*m*w)
```



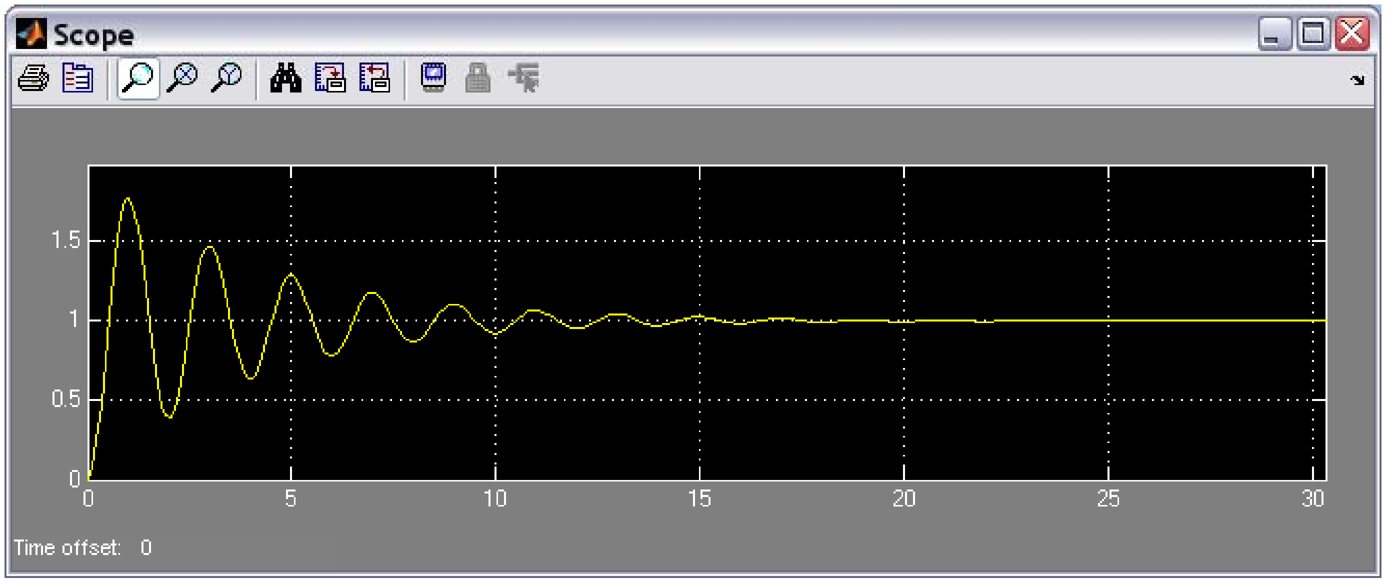


Diagramme de Bode

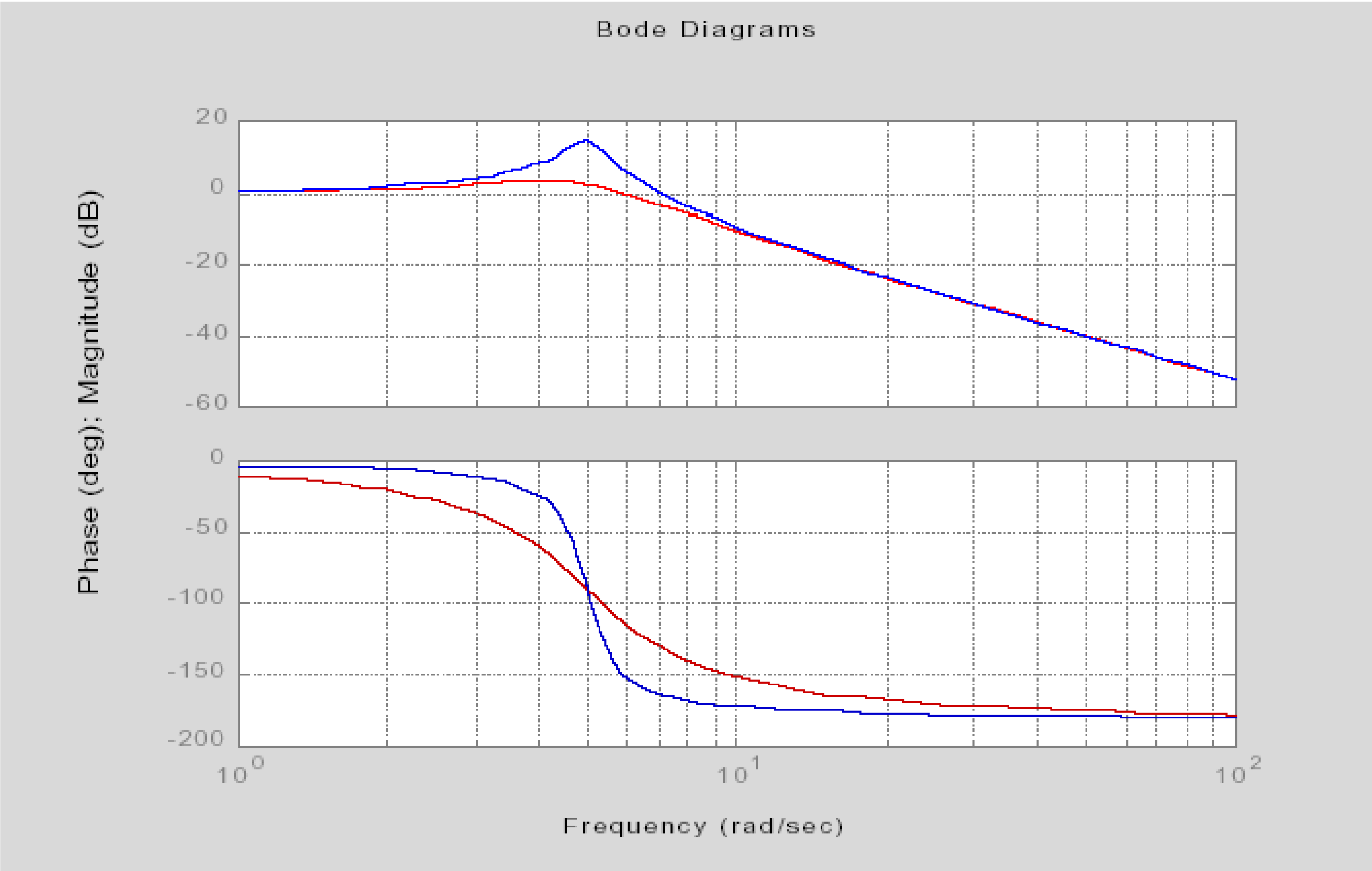
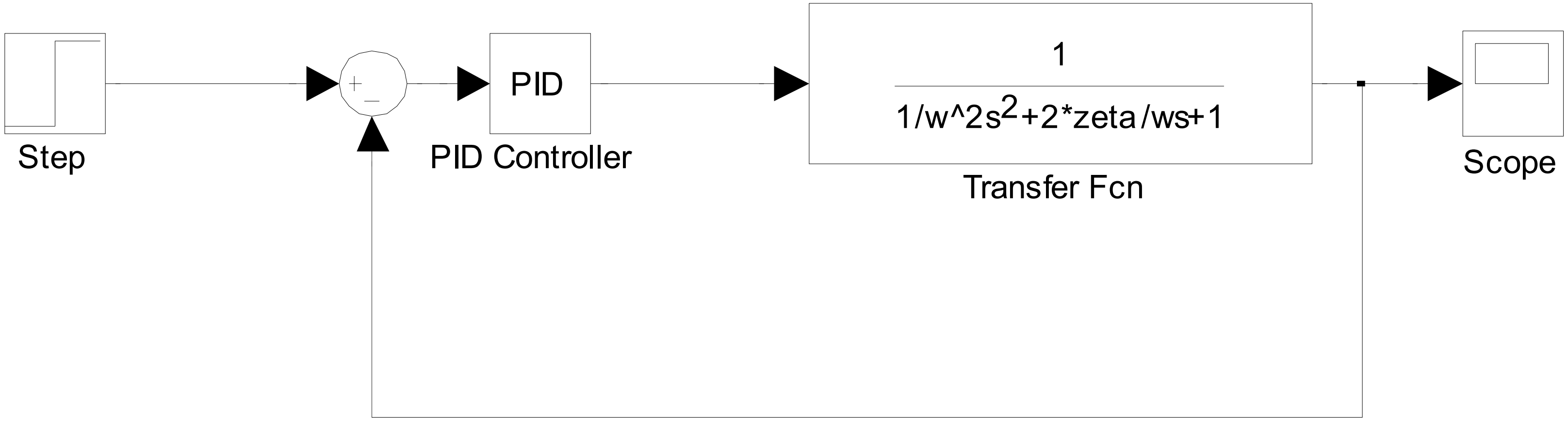
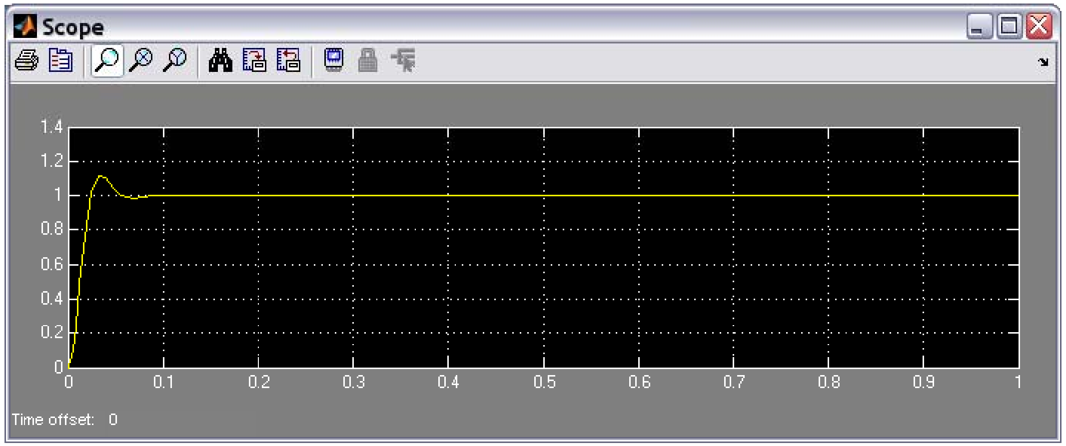
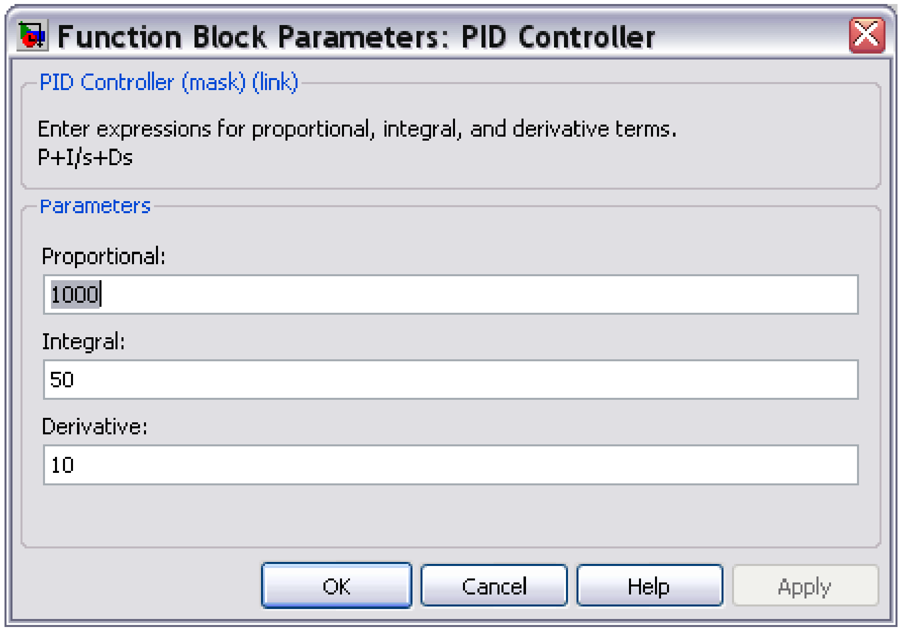


diagramme de Bode pour deux coefficients d'amortissement z= 0.1(bleu) et 0.4(rouge)

Système avec régulation
(ex. utilisé dans les instruments par comparaison)



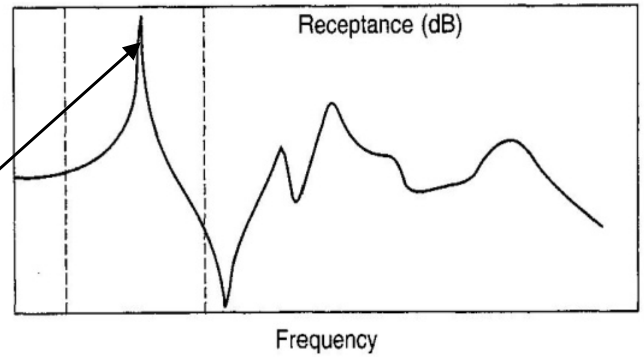




Identification d'un système de 2ème ordre
à 1 degré de liberté

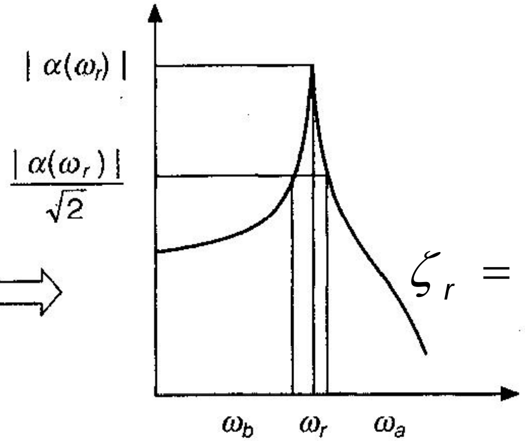
- *Peak Picking*

  - □ Fréquence:
    identifie la fréquence propre à
    la fréquence de résonnance



$$\omega_r = \omega_{pic}$$

  - □ Amortissement:
    utilise la largeur du pic à -3db ⇨



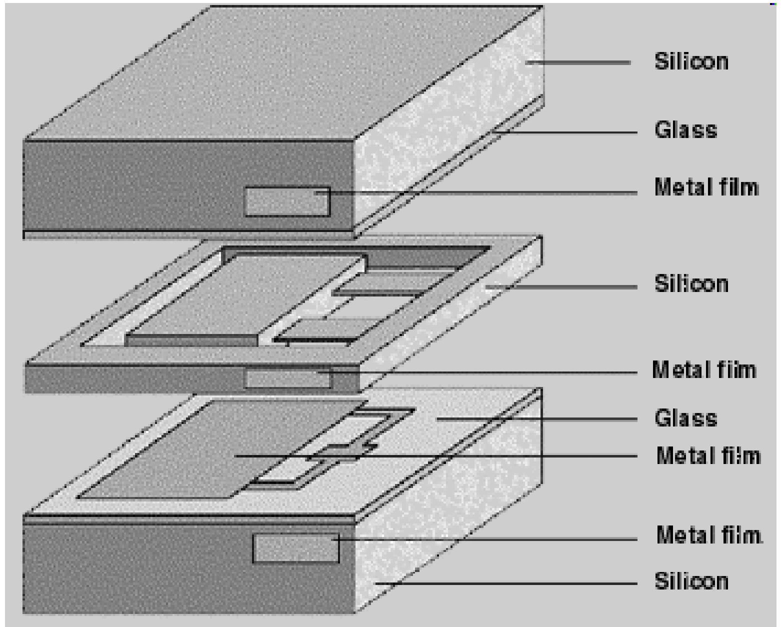
$$\zeta_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{4\omega_r^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r}$$

  - □ Rigidité (*k* ou a_0):
    utilise la valeur de la fonction
    à la résonnance

$$\frac{1}{k} \approx 2\zeta\alpha(\omega_r) = 2\zeta\frac{Y(\omega_r)}{\omega_r}$$

Exercice

- Le micro-accéléromètre de la figure ci-contre constitué d'une masse attachée sur une poutre. Il est légèrement amorti et est utilisable dans une gamme de fréquence au-dessous de sa fréquence de résonance.
- On suppose sa pulsation propre $\omega_0 = 10^4$ rad/s, et $\zeta = 0.01$.



1. Ecrire son équation du deuxième ordre et la fonction de transfert en *s*:

$$TF = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}$$

2. Tracer avec Matlab le diagramme de Bode et la réponse indicielle.
3. Evaluer la fréquence d'utilisation maximale (bande passante de cet accéleromètre) pour que la réponse ne dépasse pas une erreur de 5% sur l'amplitude.
4. Vérifier le résultat en traçant la réponse sinusoïdale à cette fréquence.

Capteur de deuxième ordre plus filtre RC

- En pratique, souvent un capteur de deuxième ordre est associé à un filtre (dont le type RC est le plus simple).

- Exemple:
  - micro-accéléromètre avec fréquence de résonance de 6 kHz et amortissement ~1%
  - filtre RC avec R=100 kΩ et C=4.55 nF

1. Ecrire l'équation de l'accéléromètre et la fonction de transfert en s.
2. Tracer avec Matlab le diagramme de Bode et la réponse indicielle pour l'accéléromètre seul, ensuite avec le filtre RC.
3. Evaluer la bande passante à -3 dB du système filtré.
4. Vérifier le résultat en traçant la réponse sinusoïdale à cette fréquence.