heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Hes·so
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

Département des Technologies Industrielles (TIN)

Cours de Métrologie (MTR) - Orientation MI

BASES DE MÉTROLOGIE

Prof. Lorenzo Zago,
et nombreux autres contributeurs

Edition Février 2012

Ce polycopié a été rédigé à l'usage exclusif des étudiant-e-s en ingénierie microtechnique de la HEIG-VD. Il résulte d'une compilation structurée de plusieurs sources: polycopiés préexistants à la HEIG-VD, Wikipédia et autres contributions disponibles librement sur Internet. Il n'a donc aucune prétention d'originalité.

Edition Février 2012

Table des matières

1 Introduction

1.1 La métrologie à quoi ça sert ?

La métrologie au sens étymologique du terme se traduit par « science de la mesure ».

La métrologie s'intéresse traditionnellement à la détermination de caractéristiques (appelées grandeurs) qui peuvent être fondamentales comme par exemple une longueur, une masse, un temps, ou dérivées des grandeurs fondamentales comme par exemple une surface, une vitesse.

Cependant, dans les domaines courants des essais, il existe de nombreuses caractéristiques n'ayant qu'une relation indirecte avec ces grandeurs. C'est le cas, par exemple, de la dureté, de la viscosité, qui peuvent poser des problèmes dans l'interprétation.

Mesurer une grandeur physique consiste à lui attribuer une valeur quantitative en prenant pour référence une grandeur de même nature appelée unité.

Dans le langage courant des «métrologues», on entend souvent dire **mesurer c'est comparer**.

Les résultats des mesures servent à prendre des décisions dans de nombreux domaines, tels que:

- acceptation d'un produit (mesure de caractéristiques, de performances, conformité à une exigence),
- réglage d'un instrument de mesure, validation d'un procédé,
- réglage d'un paramètre dans le cadre d'un contrôle d'un procédé de fabrication
- validation d'une hypothèse scientifique,
- protection de l'environnement,
- définition des conditions de sécurité d'un produit ou d'un système.

L'ensemble de ces décisions concourt à la qualité des produits ou des services: on peut qualifier quantitativement la qualité d'un résultat de mesure grâce à son incertitude.

En effet sans incertitude les résultats de mesure ne peuvent plus être comparés:

- soit entre eux (essais croisés),
- soit par rapport à des valeurs de référence spécifiés dans une norme ou une spécification (conformité d'un produit).

1.2 Métrologie et société, une perspective historique

(Article de Marie-Ange Cotteret, Revue des ingénieurs du Syndicat National des Ingénieurs de l'Industrie et des Mines - 02 2008)

1.2.1 Naissance de la métrologie

Le néolithique, que les préhistoriens considèrent maintenant comme l'installation de la civilisation agraire, voit les populations d'agriculteurs et d'éleveurs se sédentariser dans les régions où le sol est fertile et le climat favorable. Les groupes humains peuvent dorénavant se nourrir plus facilement sur un moindre territoire. Le changement social semble considérable. Les chasseurs-cueilleurs ont, depuis des millénaires, développé des connaissances innombrables sur les ressources naturelles qui les entourent. Les agriculteurs-éleveurs deviennent sédentaires. La transformation technique, économique et culturelle d'une part de la population jusque là culturellement et économiquement nomade, chasseurs, pêcheurs et cueilleurs, est, de mémoire, la première révolution technique connue.

En Basse Mésopotamie, la terre est fertile et produit bientôt de considérables surplus de nourriture et de bétail. Entre la fin du quatrième et le début du troisième millénaire, la campagne mésopotamienne se dépeuple au profit des Cités-Etats qui se construisent, au Pays de Sumer, en complément des villages d'agriculteurs. Leur fonction est à la fois marchande et militaire. L'économie naissante transforme les statuts et les relations selon un processus mécanique qui semble inévitable et paraît échapper à la volonté des acteurs. Le surplus démographique des villages se déverse dans les villes en même temps que le surplus de production vivrière, et cela d'autant plus aisément qu'il s'agit des enfants de ceux qui restent à la terre et continuent à assurer une base de subsistance et de repli éventuel pour leur progéniture.

Le commerce extérieur devient une composante structurelle de la société mésopotamienne. Pour faire fonctionner ce commerce, se développent l'écriture, la comptabilité, l'école, les tribunaux et, bien entendu, la métrologie qui joue un rôle central désormais dans l'organisation économique et sociale.

Poids olive — Poids en pierre non marqués — Petits poids canard

La métrologie et son usage, nécessairement collectif, supposent un ensemble d'actes cognitifs, techniques et sociaux complexe. Un pacte métrologique règle, à partir d'un contrat de confiance mutuelle, les conditions de l'échange dans l'espace commun. La mesure y est un outil de médiation pour l'échange d'objets ou de quantités de matière. Elle est aussi médiatrice entre des individus ou des groupes qui s'organisent pour créer une même réalité métrique en se mettant d'accord sur des pratiques, en choisissant des étalons et en organisant des dispositifs de contrôle réciproque.

Les plus vieux poids[1] retrouvés en Mésopotamie sont en pierre polie. Les fouilles des différents trésors montrent une caractéristique surprenante: l'anonymat des poids et celle des monnaies. Ce fait ne démontre t-il pas de solides relations de confiance entre les hommes et entre les groupes ?

Un autre constat surprenant: certains concepts de base de la métrologie mésopotamienne régissent l'infrastructure métrologique actuelle. Outre le fait que nous calculons, comme le faisaient les anciens habitants de la Mésopotamie, l'heure, les minutes, les secondes et les angles sur la même base sexagésimale, il semble encore nécessaire pour avoir confiance dans les échanges, de se mettre d'accord sur un étalon et la manière de s'en servir et donc de partager une culture métrologique commune au sein d'un espace métrologique commun.

Un troisième constat apparaît: un lien indissociable entre la transformation d'un système technique, et face à la crise des valeurs qu'elle génère, la question sociale de la mesure, le partage de la connaissance, tant les savoirs conceptuels que les savoir-faire, voire de savoir-être.

1.2.2 La référence commune: l'étalon

Les anciens étalons sont gardés précieusement dans de hauts lieux symboliques. Les poids mésopotamiens sont retrouvés dans d'anciens temples et palais. À Athènes, une compagnie de quinze officiers prend soin des mesures originales et de l'inspection de l'étalonnage. Chez les Romains, les étalons sont conservés au Capitole, dans le temple de Jupiter. Charlemagne les conserve dans son palais. En Europe chrétienne, ils sont scellés sur les halles de marché et sur les murs extérieurs des églises. Aujourd'hui encore et ce pour un temps seulement, l'étalon de masse, dernier étalon matériel, est gardé précieusement sous trois cloches au Bureau International des Poids et Mesures.

La référence commune, l'étalon, base de toute négociation réciproque et juste, a nécessité de tout temps un arbitrage entre plusieurs groupes de pression, marchands, acheteurs, paysans, classes dirigeantes, seigneurs fieffés, abbayes, pouvoir royal… Régulièrement, les marchands et la classe dirigeante cherchent, sous des formes diverses et renouvelées, à modifier les étalons pour servir leurs intérêts, ce qui va souvent de pair avec l'ignorance d'une part de la population des choses de la métrologie. En contre partie, à travers le temps, un phénomène tout aussi régulier apparaît, celui d'une tentative d'unification qui s'accompagne naturellement d'actions éducatives. Des tablettes montrent que des écoles transmettent le savoir et les usages métrologiques en Mésopotamie et en Egypte. Charlemagne unifie les mesures et développe le système scolaire. A la Révolution française, la commission du mètre est confiée au Comité d'Instruction publique.

1.2.3 Diversité des mesures

Depuis l'Antiquité, ce ne sont pas sept *unités fondamentales* du Système International, mais des milliers de mesures différentes, réinventées ou reconfigurées siècle après siècle qui vivent et s'éteignent. Tillet et Abeille présentent les Observations de la Société royale d'agriculture sur l'uniformité des Poids et mesures, réalisées par Villeneuve, à l'Assemblée nationale le 6 février 1790. Ils constatent: *C'est un fait notoire que non seulement on se sert en France de quantité de poids différents qui portent tous le nom de livre, mais encore une multitude de boisseaux, d'aunes, de verges, de cannes, de toises, de pintes ; et que ces mesures diffèrent entre elles, quoiqu'on les désigne par le même nom ; que ces différences sont très considérables, non pas d'une province à une autre, ou d'une ville à une autre, mais dans la même ville, dans le même bourg, dans le même village*.

[1] Aujourd'hui on parle de masse.

Les révolutionnaires ne sont pas les premiers à percevoir les inconvénients du foisonnement métrologique. En France, les tentatives pour y remédier commencent avant l'an mille. En 744, Childéric III, voulut unifier les mesures. Les capitulaires de Charlemagne en 789, 803 et 806 ordonnent que les mesures soient égales et les poids justes.: *Aequales mensuras et rectas, pondera justa*.

Enfin, la métrologie est nommée en 1780 par Paucton dans son ouvrage *Métrologie ou traité des Mesures, Poids et Monnaies des Anciens peuples et des Modernes*. Dans les Cahiers de doléances, les trois ordres demandent en substance et pour des raisons diverses qu'il n'y ait plus en France *qu'un roi, une loi, un poids et une mesure*.

La métrologie est alors confiée aux savants. Ceux-ci sont aussi philosophes, hommes de sciences et acteurs politiques de l'époque. Le premier système cohérent de métrologie, le système métrique décimal est considéré comme un triomphe de l'esprit humain. Il sera le vecteur d'une égalité entre les citoyens, de fraternité entre les peuples et celui de la libération des hommes. Cette transformation de tous les repères subjectifs et sociaux est largement plébiscitée. Petit, par exemple, écrit en 1809: *Aujourd'hui les poids et les mesures étant partout les mêmes. Les affaires peuvent se traiter sans embarras, et il n'y a plus de nouveaux calculs à faire pour vendre ou pour acheter, quand on sait de quoi il s'agit ici. Il y a un temps qu'on désirait un pareil changement; l'intérêt public autant que les intérêts particuliers le sollicitaient : le nouveau système des poids et des mesures est donc, sous ce rapport, un bienfait incontestable*.

La métrologie, dorénavant confiée aux scientifiques et aux ingénieurs, va subir des transformations scientifiques, techniques et organisationnelles de très grande ampleur. Maintenant, avec le développement technique que nous connaissons, la métrologie du quotidien charpente et coordonne nos actes journaliers. Le bon fonctionnement de nos infrastructures urbaines, la localisation par satellites, les normes alimentaires, les diagnostics médicaux, les règles d'échanges de biens internationaux, notre montre bracelet ou le thermomètre familial, reposent sur une organisation internationale de la métrologie.

1.2.4 Une culture métrologique commune ?

Je vais régulièrement au salon de l'éducation qui a lieu annuellement à Paris. J'y effectue un sondage. Nous ne pouvons pas parler d'échantillon statistiquement élaboré, mais d'un coup de loupe localement situé. En 2001, sur 91 personnes interrogées, élèves et adultes, 88 % ne savent pas ce qu'est la métrologie. En réponse à un QCM, 46 % pensent que c'est la science des transports urbains ! En 2004, sur 131 personnes, 93 % ne savent pas ce qu'est la métrologie. En réponse au QCM, 26 % d'entre elles, pensent que c'est la science de la prévision du temps.

En 2005, 50 enseignants sont sollicités pour répondre à la question : aujourd'hui, quelle est l'unité fondamentale de temps ? 5O % répondent injustement, l'heure. 10 % ne sait pas. 15 % pensent que c'est la minute. Seuls 25 % énoncent la seconde !

Ces résultats font sourire… à moins qu'ils nous incitent à prendre conscience, comme le remarque Lord Kelvin (1824-1907), *qu'un changement de système de mesure n'est pas sans conséquence sur les systèmes de pensée. À moins que ce ne soit l'évolution des idées qui conduise à bouleverser les unités de mesure*.

Alors que la technique et la science du début du XXIe siècle mobilisent des performances métrologiques jamais atteintes, pour la fabrication des microprocesseurs ou le positionnement par satellite par exemple, l'enseignement de la métrologie semble avoir décliné depuis un siècle. On peut aujourd'hui arriver jusqu'à un diplôme d'enseignement supérieur sans avoir pratiqué la mesure et ses calculs d'incertitude, donc vulnérable aux désinformations et aux erreurs de toutes natures.

Entre l'ignorance généralisée de culture métrologique des gens et une demande accrue d'une opinion publique concernant des sujets hautement scientifiques et techniques, n'y a-t-il pas comme un déséquilibre ? Jusqu'où a t-on oublié qu'une des bases de l'exercice du bon sens et de la citoyenneté passerait par une connaissance des systèmes de mesure qui gère notre société ?

La métrologie, ou science de la mesure, est considérée par les scientifiques comme le langage universel des sciences et des techniques. Le système international a remplacé le système métrique décimal, mais qu'en est-il de sa diffusion ? Qu'en est-il de la prise en compte par le plus grand nombre des grands changements tant paradigmatiques que cognitifs, symboliques et philosophiques que ce *nouveau* système de mesure transporte ? Le dernier étalon matériel, le kilogramme sera prochainement considéré comme une pièce de musée et remplacé par une définition aussi obscure pour le public non averti que les définitions des autres unités de base.

Jusqu'où peut-on tromper le peuple ? demandait Voltaire en 1756. Peut-on comprendre les règles sans avoir accès aux règles qui font les règles ? Sans culture métrologique appropriée, les décisions prises par des citoyens ignorants ne peuvent être que des opinions et, les opinions chacun le sait, sont manipulables.

En 1981, le Centre de Recherche sur la Culture Technique (C.R.C.T.) dans son Manifeste pour le développement de la culture technique constate : « *La technique contemporaine n'est plus la technique des sociétés traditionnelles. Elle soutient par rapport à la recherche, un rapport tout différent. Technique et Science sont beaucoup plus proches l'une de l'autre que jadis, au point où l'ensemble scientifico-technique semble même constituer, pour le corps social, une menace globale qu'il lui est difficile à contrôler tant il lui est étranger.* Il est ajouté *Nous constatons [d'autre part] que le milieu dans lequel nous vivons est de plus en plus constitué d'objets techniques inscrits dans une longue tradition historique, scientifique et culturelle. Il semble donc évident que celui qui manque de culture technique vit dans l'ignorance de son propre milieu.* »

La mesure, d'après les racines sanscrites du mot a pour premier sens non pas celui de *pensée*, de connaissance et de mensuration, mais celui d'équilibre modéré (celui du corps qui recouvre la santé ou d'un ensemble social bien géré). La racine *med* (*médéor* guérir) a donné médecine. Méditer, au sens de réfléchir, est de même origine. Ne dit-on pas qu'un homme sage et réfléchi est un homme mesuré ? Peut-on honnêtement oublier que sans vérification par des mesures, une théorie aussi brillante soit-elle ne peut être validée ? Les défis qui nous attendent face au réchauffement de la planète, la pollution, la solidarité entre les peuples posent la question de la conscience et de la mesure.

Thierry Gaudin soutient que *la reconnaissance précède la connaissance*. La revendication d'universalisme, dans le cas de la métrologie, n'est pas que cette activité s'imposerait naturellement, comme la gravitation universelle, à tous les humains, mais que cette activité, reposant sur un partage, a vocation à être utilisée par tous les hommes, au-delà de leurs appartenances et particularismes culturels. Le choix, par une collectivité, de partager une métrique commune, n'est pas un abandon d'identité mais l'ouverture d'une porte vers l'autre.

C'est ce processus d'ouverture qui peut être qualifié d'universel. Aujourd'hui où les biologistes et cognitivistes montrent que la coopération est l'essence de la vie et non pas l'individualisme, tel que nous le vivons aujourd'hui pour le plus grand mal de la collectivité, la métrologie, considérée comme bien commun n'est-elle pas une des bases essentielle et universelle de reconnaissance et de connaissance individuelle et collective ?

1.3 La mesure d'une grandeur physique

On appelle **grandeur physique** toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre généralement accompagné d'une unité de mesure.

Ainsi par exemple, la masse et la longueur sont des grandeurs qui s'expriment respectivement en kilogramme et en mètre (ou en multiples de ces unités de base), alors que l'indice de réfraction d'un milieu s'exprime à l'aide d'un nombre sans unité et constitue une grandeur sans dimension.

L'addition et la soustraction de nombres n'est possible que s'ils sont relatifs à la même grandeur. En revanche, il est possible de multiplier ou de diviser des grandeurs différentes, auquel cas on obtient une nouvelle grandeur dérivée des deux autres. Par exemple, la vitesse est issue de la division de la longueur par le temps. Il existe donc théoriquement une infinité de grandeurs, mais seul un certain nombre d'entre elles sont utilisées dans la pratique. Le domaine de la physique qui traite des relations entre les grandeurs est l'analyse dimensionnelle.

On écrira le résultat d'une mesure d'une grandeur sous la forme:

$$X = \{X\} \cdot [X]$$

où X est le nom de la grandeur physique, [X] représente l'unité et {X} est la valeur numérique de la grandeur exprimée dans l'unité choisie.

Toute grandeur physique est invariante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'unité dans laquelle on l'exprime. Par exemple:

longueur d'une règle = 30,48 cm,

0,3048 m,

12 pouces,

$1,646 \cdot 10^{-4}$ mille marin.

On remarque que la valeur numérique dépend de l'unité choisie. En conséquence, celle-ci doit toujours être précisée.

1.4 Un peu de vocabulaire

Dans le vocabulaire officiel – voir l'**annexe A** - des normes de métrologie, cette opération communément appelée mesure est appelée **mesurage** (en anglais *measurement*).

De même, la grandeur physique soumise à l'opération de mesurage est appellée **mesurande** (en anglais *measurand*).

Attention aux faux amis, l'opération d'**étalonnage** (en anglais *calibration*) doit être distinguée de celle appelée **calibrage** (en anglais *gauging*).

Il ne faut pas utiliser le terme précision mais le terme **incertitude** (en anglais *uncertainty*).

2 Système international d'unités

Le **Système International d'unités** (abrégé en **SI**), inspiré du **système métrique**, est le système d'unités le plus largement employé du monde. Il s'agit d'un système d'unités décimal (on passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10).

C'est la Conférence générale des poids et mesures, rassemblant des délégués des états membres de la Convention du Mètre, qui décide de son évolution, tous les quatre ans, à Paris.

L'abréviation de « Système International » est SI, quelle que soit la langue utilisée.

La norme internationale **ISO 1000 (ICS 01 060)** décrit les unités du Système International et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités.

2.1 Unités de base

Les définitions des unités de base du système international utilisent des phénomènes physiques reproductibles.

Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel susceptible de s'altérer. Actuellement, des recherches ont donc lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique.

À l'issue de ces recherches, le kilogramme pourrait perdre son statut d'unité de base au profit d'une autre unité: c'est en effet seul le nombre d'unités fondamentales qui est imposé, puisqu'elles doivent permettre, par combinaison, de mesurer toute grandeur physique connue sans définition redondante, mais le choix précis des unités fondamentales comme les unités de masse, longueur, temps, courant électrique, température, intensité lumineuse et quantité de matière est purement **arbitraire**.

Grandeur	**Symbole**	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**	**Définition, Remarques**
longueur	l	mètre	m	**Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 de seconde.** Historiquement, la première définition officielle et pratique du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la terre, et valait 1/40000000 d'un méridien. Auparavant, le mètre en tant que proposition d'unité décimale de mesure universelle était défini comme la longueur d'un pendule qui oscille avec une demi-période d'une seconde.

Grandeur	**Symbole**	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**	**Définition,** Remarques
masse	m	kilogramme	kg	**Le kilogramme est la masse du prototype international du kilogramme.** Ce dernier, composé d'un alliage de platine et d'iridium (90%-10%), est conservé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres, en France. Historiquement, la définition du kilogramme était la masse d'un décimètre cube d'eau (un litre).
temps	t	seconde	s	**La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à la température de 0 kelvin.** La seconde était à l'origine basée sur la durée du jour terrestre, divisé en 24 heures de 60 minutes, chacune d'entre elles durant 60 secondes (soit 86 400 secondes pour une journée)
courant électrique	I	ampère	A	**L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} newton par mètre de longueur.**
température	T	kelvin	K	**Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.**
quantité de matière	n	mole	mol	**La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.** Ce nombre d'entités élémentaires est appelé nombre d'Avogadro. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.
intensité lumineuse	I_V	candela	cd	**La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watt par stéradian.**

Certaines unités fondamentales utilisent d'autres unités fondamentales dans leur définition, parfois *via* des unités dérivées (la définition de la seconde utilise par exemple celle du kelvin). Les unités fondamentales ne sont donc pas strictement indépendantes les unes des autres, mais telles sont les grandeurs physiques qu'elles permettent de mesurer qui le sont.

2.2 Unités supplémentaires

A côté de ces unités de base et des unités dérivées, il existe des unités supplémentaires, au nombre de deux:

- l'unité d'angle plan: le **radian** (symbole: rad) ; le radian est l'angle plan compris entre deux rayons qui, sur la circonférence d'un cercle, interceptent un arc de longueur égale à celle du rayon,
- l'unité d'angle solide: le **stéradian** (symbole: sr) ; le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

Les grandeurs «angle plan» et «angle solide» doivent être considérées comme des unités sans dimension qui peuvent être utilisées ou non dans les expressions des unités dérivées.

2.3 Unités dérivées

Les unités dérivées font partie du système international d'unités et sont déduites des sept unités de base.

2.3.1 Unités ayant un nom et un symbole spécial

Grandeur physique	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Expression en termes d'autres unités	Expression en termes d'unités de base	Relation
Fréquence	hertz	Hz		s^{-1}	Fréquence = 1 / période
Force	newton	N		$kg\ m\ s^{-2}$	Force = masse · accélération
Contrainte et pression	pascal	Pa	$N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Pression = force / surface
Travail, énergie et quantité de chaleur	joule	J	N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Travail = force · distance; énergie cinétique = masse · vitesse^2 / 2
Puissance, flux énergétique et flux thermique	watt	W	$J\ s^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Puissance = travail / temps
Quantité d'électricité et charge électrique	coulomb	C		A s	Charge = courant · temps

Grandeur physique	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**	**Expression en termes d'autres unités**	**Expression en termes d'unités de base**	**Relation**
Force électromotrice et différence de potentiel (ou tension)	volt	V	$J\ C^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	Tension = travail / charge
Résistance électrique	ohm	Ω	$V\ A^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}$	Résistance = tension / courant
Conductance électrique	siemens	S	$A\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3\ A^2$	Conductance = courant / tension
Capacité électrique	farad	F	$C\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$	Capacité = charge / tension
Induction magnétique	tesla	T	$V\ s\ m^{-2}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Induction = tension · temps / surface
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	V s	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Flux d'induction = tension · temps
Inductance électrique	henry	H	$V\ s\ A^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$	Inductance = tension · temps / courant
Température	degré Celsius	°C		K	
Flux lumineux	lumen	lm	cd sr		
Éclairement lumineux	lux	lx	$cd\ sr\ m^{-2}$		
Activité (radioactive)	becquerel	Bq		s^{-1}	
Énergie communiquée massique, dose absorbée, kerma	gray	Gy	$J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$	
Équivalent de dose	sievert	Sv	$J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$	
Activité catalytique	katal	kat		$mol\ s^{-1}$	

2.3.2 Autres unités

Grandeur physique	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**	**Expression en termes d'unités de base**
Aire	mètre carré	m^2	
Volume	mètre cube	m^3	
Vitesse	mètre par seconde	$m\ s^{-1}$	
Vitesse angulaire	radian par seconde	$rad\ s^{-1}$	
Accélération	mètre par seconde carrée	$m\ s^{-2}$	
Accélération angulaire	radian par seconde carrée	$rad\ s^{-2}$	
Moment d'une force	newton-mètre	N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$
Nombre d'onde	mètre à la puissance moins un	m^{-1}	
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	$kg\ m^{-3}$	
Masse linéique	kilogramme par mètre	$kg\ m^{-1}$	
Volume massique	mètre cube par kilogramme	$m^3\ kg^{-1}$	
Concentration molaire	mole par mètre cube	$mol\ m^{-3}$	
Volume molaire	mètre cube par mole	$m^3\ mol^{-1}$	
Capacité thermique, entropie	joule par kelvin	$J\ K^{-1}$	$kg\ m^2\ K^{-1}\ s^{-2}$
Capacité thermique molaire, entropie molaire	joule par mole-kelvin	$J\ mol^{-1}\ K^{-}$	$kg\ m^2\ mol^{-1}\ K^{-1}\ s^{-2}$
Chaleur massique, entropie massique	joule par kilogramme-kelvin	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	$m^2\ K^{-1}\ s^{-2} = m^2 . K^{-1} . s^{-2}$
Énergie molaire	joule par mole	$J\ mol^{-1}$	$kg\ m^2\ mol^{-1}\ s^{-2}$
Énergie massique	joule par kilogramme	$J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$
Énergie volumique	joule par mètre cube	$J\ m^{-3}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Tension capillaire	newton par mètre	$N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$
Flux de chaleur	watt par mètre carré	$W\ m^{-2}$	$kg\ s^{-3}$
Conductivité thermique	watt par mètre-kelvin	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$	$m\ kg\ K^{-1}\ s^{-3}$
Viscosité cinématique	mètre carré par seconde	$m^2\ s^{-1}$	
Viscosité dynamique	pascal-seconde	Pa s	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$

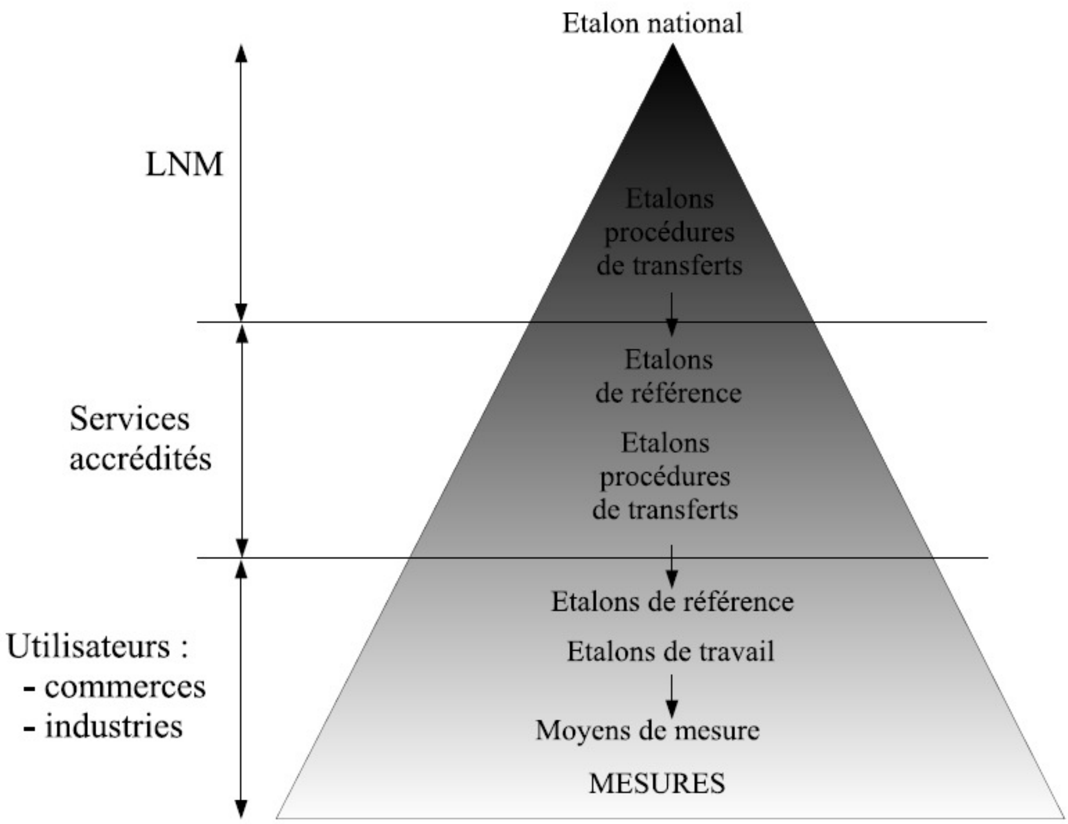
Grandeur physique	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**	**Expression en termes d'unités de base**
Densité de charge électrique	coulomb par mètre cube	$C\ m^{-3}$	$A\ s\ m^{-3}$
Densité de courant	ampère par mètre carré	$A\ m^{-2}$	
Conductivité	siemens par mètre	$S\ m^{-1}$	$A^2\ s^3\ kg^{-1}\ m^{-3}$
Conductivité molaire	siemens mètre carré par mole	$S\ m^2\ mol^{-1}$	$A^2\ s^3\ kg^{-1}\ mol^{-1}$
Permittivité	farad par mètre	$F\ m^{-1}$	$A^2\ s^4\ kg^{-1}\ m^{-3}$
Perméabilité	henry par mètre	$H\ m^{-1}$	$m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Intensité de champ électrique	volt par mètre	$V\ m^{-1}$	$m\ kg\ A^{-1}\ s^{-3}$
Intensité de champ magnétique	ampère par mètre	$A\ m^{-1}$	
Luminance	candela par mètre carré	$cd\ m^{-2}$	
Exposition (rayons X et gamma)	coulomb par kilogramme	$C\ kg^{-1}$	$A\ s\ kg^{-1}$
Débit de dose absorbée	gray par seconde	$Gy\ s^{-1}$	$m^2\ s^{-3}$
Débit massique	kilogramme par seconde	$kg\ s^{-1}$	
Débit volumique	mètre cube par seconde	$m^3\ s^{-1}$	

2.4 Traçabilité des mesurages

La traçabilité est la propriété du résultat d'un mesurage tel qu'il puisse être relié à des références déterminées, généralement des étalons nationaux ou internationaux, par l'intermédiaire d'une **chaîne ininterrompue de comparaisons** ayant toutes des incertitudes déterminées.

Son organisation est pyramidale (figure ici-bas), c'est-à-dire de la référence nationale (et donc internationale) vers l'utilisateur.

Les LNM (Laboratoire Nationaux de Métrologie) détiennent les références nationales et les diffusent vers l'utilisateur. En Suisse, il s'appelle le METAS (http://www.metas.ch).



3 Systèmes de mesure

La mesure est un acte quotidien et des mesures comme celles de la température, de l'heure ou du poids sont des choses de la vie courante pour lesquelles peu d'attention est portée sur les instruments de mesure utilisés et sur l'exactitude des résultats obtenus. Cependant, pour des équipements plus importants comme on peut en trouver dans les installations industrielles, ces questions deviennent essentielles afin de garantir la qualité de l'ensemble du processus de mesure.

Il est ainsi souvent nécessaire de respecter une norme ou de garantir la fiabilité d'un composant et on doit être assuré de la **qualité des mesures** que l'on effectue. Pour cela il est nécessaire d'apporter une grande attention au matériel utilisé durant la mesure ainsi qu'à la façon dont elle est effectuée.

3.1 Introduction

Un système de mesure est généralement constitué de quatre parties: le capteur qui traduit la valeur physique en un signal généralement de nature électrique, le conditionneur de signaux qui transforme le signal du capteur pour en modifier l'amplitude ou pour le filtrer, la sortie qui permet de lire la valeur mesurée et éventuellement un système de contrôle par feedback dans le cas où le système de mesure est inclus dans un contrôle de processus.

Le capteur utilise un phénomène physique réagissant à la valeur physique à mesurer et assure sa transformation en un signal électrique, optique ou mécanique plus facile à manipuler et à quantifier. Les différents types de capteurs et leurs fonctionnements seront décrits beaucoup plus en détail par la suite.

L'ensemble de l'équipement constitue une partie du processus de mesure. En effet, il doit être complété par une procédure de mesure qui définira l'ensemble des grandeurs à mesurer, les moyens techniques pour y parvenir et qui déterminera aussi l'ensemble des traitements à effectuer sur les valeurs mesurées pour parvenir à l'objectif final.

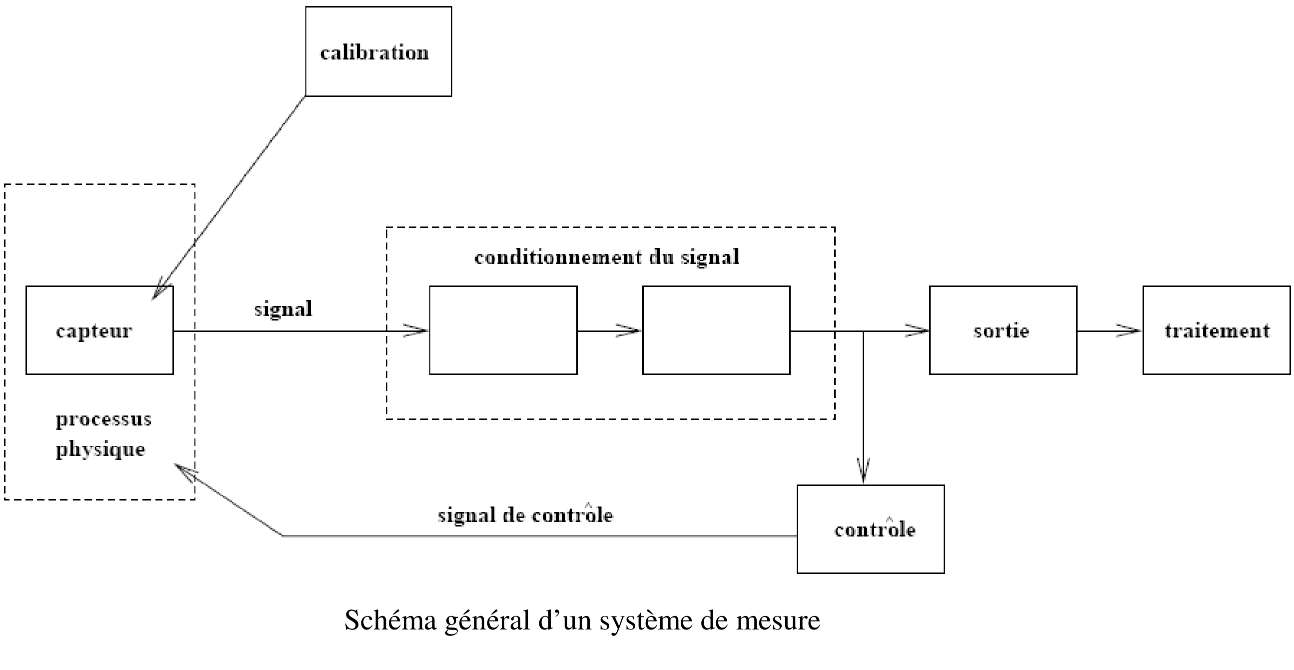


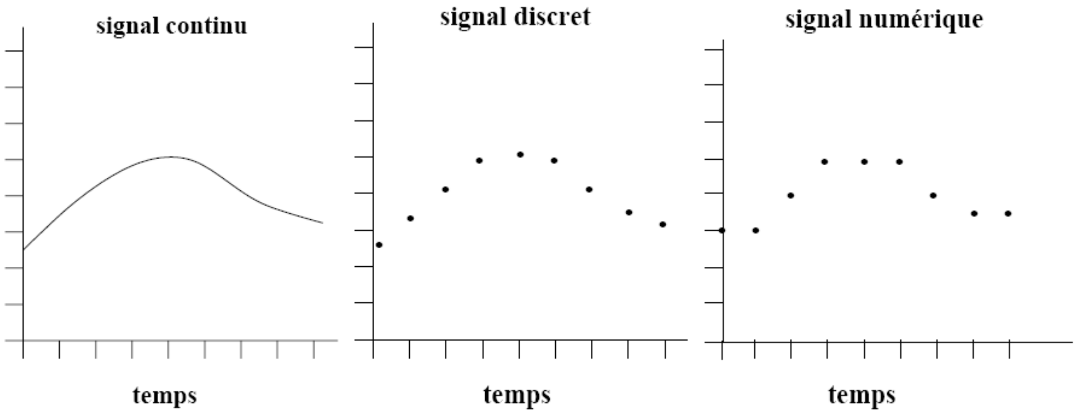
Schéma général d'un système de mesure

3.2 Signaux

Un système de mesure transforme une entrée, en règle générale la quantification d'un phénomène physique, en un signal de sortie. Différents types de signaux sont transmis entre les capteurs, les conditionneurs et la sortie du système. Une caractérisation de ces signaux est nécessaire à la compréhension du fonctionnement des appareils de mesure.

Pour cela, on peut dans un premier temps classifier les signaux en trois catégories selon leur représentation temporelle et les valeurs prises par la quantité mesurée.

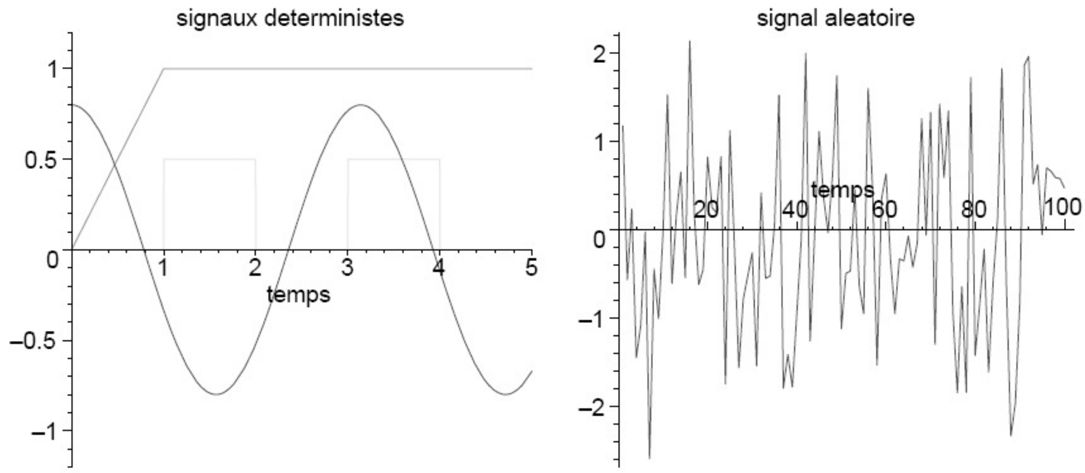
On distingue ainsi: les **signaux continus** (dits aussi **analogiques**), les **signaux discrets**, les **signaux numériques**. Ces types de signaux sont représentés sur la figure suivante.



- Un **signal continu** est défini pour toutes les valeurs du temps et peut prendre n'importe quelle valeur en amplitude.
- Un **signal discret** est en général un signal continu qui est mesuré à certains instants seulement.
- Un **signal numérique** est un signal discret qui a été quantifié et qui par conséquent ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs en amplitude.

Un signal analogique peut être numérisé à l'aide d'un convertisseur analogique numérique. La transformation inverse d'un signal est réalisée par un convertisseur numérique analogique.

En fonction du phénomène physique qu'ils représentent, il faut aussi distinguer les **signaux déterministes** en fonction du temps pour lesquels les valeurs futures peuvent être prédites, des **signaux aléatoires** qui ne sont pas prédictibles et qui nécessiteront des traitements spécifiques. Ces deux types de signaux sont représentés sur la figure suivante.



Les signaux de mesure sont généralement des signaux déterministes. Les bruits de mesure sont des signaux aléatoires qui s'ajoutent aux signaux à mesurer. Un signal d'interférence est plutôt un signal de type déterministe qui s'ajoute au signal à mesurer et qui le perturbe.

Enfin, une dernière caractéristique des signaux concerne l'intervalle de temps sur lequel ils sont définis. Il faut distinguer les signaux transitoires qui n'existent que sur un intervalle de temps fini des signaux permanents définis à tout instant.

On distinguera aussi les **signaux stationnaires** dont les propriétés n'évoluent pas en fonction du temps, des **signaux non-stationnaires** dont les propriétés sont variables en fonction du temps. Par exemple un bruit de mesure d'origine thermique est un signal stationnaire et permanent alors qu'un choc engendre un signal transitoire.

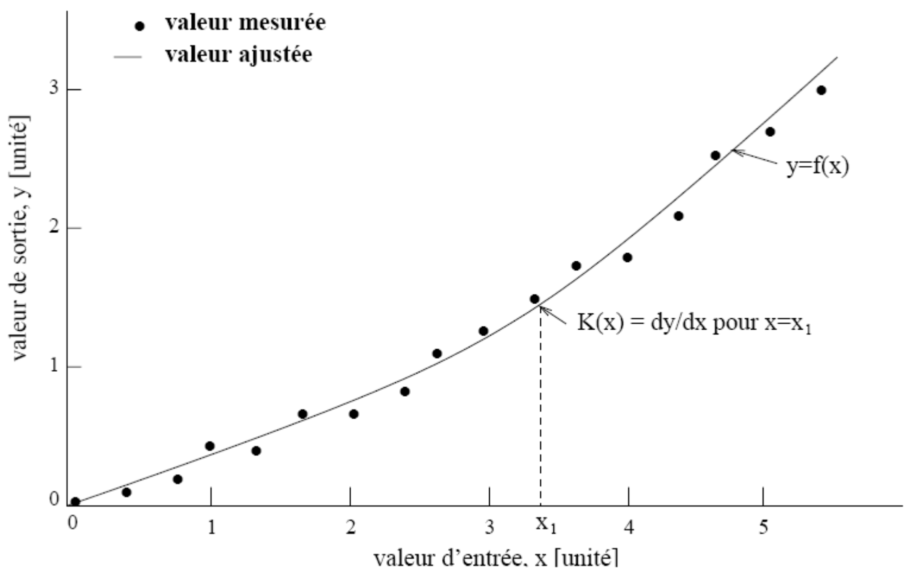
3.3 Etalonnage

Pour les capteurs instruments de mesure, l'étalonnage est un réglage ou une caractérisation de la réponse de l'appareil. Pour cela, généralement on utilise des grandeurs de référence ou étalons.

L'étalonnage d'un instrument consiste à appliquer une valeur connue en entrée du système de mesure afin de vérifier que la sortie correspond bien à la valeur attendue. En entrant différentes valeurs connues on peut obtenir en sortie la courbe d'étalonnage

$$y = f(x)$$

de l'instrument qui permet de relier la valeur lue en sortie notée y à la vraie valeur de la grandeur physique à mesurer notée x (voir figure ici-bas).



C'est particulièrement utile lorsque la réponse de l'instrument est non linéaire.

La méthode générale consiste à utiliser l'appareil de mesure sur un étalon, et à vérifier que la mesure produite correspond bien à la valeur attendue ; si ce n'est pas le cas, on corrige le réglage de l'appareil. Par exemple, on pèse une masse étalon, et on corrige la position de l'aiguille pour que celle-ci indique la valeur correcte. C'est l'étalonnage dit *à un point*.

Cependant, cela ne suffit pas toujours. L'appareil peut présenter :

- Une dérive systématique: il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une quantité fixe ;
- Une dérive de sensibilité: il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une proportion (d'un pourcentage) donné.

Chaque mesure étant entachée d'erreur, y compris la mesure des étalons, on effectue en général plusieurs mesure du même étalon, ou bien on utilise plus d'étalons que nécessaire et l'on détermine la courbe d'étalonnage par régression (méthode des moindres carrés).

L'étalonnage est généralement effectué par le fabricant de l'appareil de mesure. De manière générale, un appareil de mesure transforme un paramètre physique en une donnée analogique (lecture sur un cadran, tracé d'un feutre sur un papier) ou un signal électrique, qui peut ensuite être converti en données numériques.

De plus en plus sur les appareils modernes la correction suite à l'étalonnage n'est pas réglée sur l'instrument mais est fournie dans un fichier numérique. Cette correction est de fait effectuée numériquement par un microcontrôleur ou par l'ordinateur relié à l'instrument.

L'opération d'étalonnage permet aussi de déduire la **justesse** de l'instrument. La justesse est l'aptitude de l'instrument à fournir la vraie valeur de la grandeur physique. En entrant une valeur connue, on peut mesurer l'erreur due à l'instrument et définir la justesse par

$$e_{\%} = 1 - \frac{|\text{ vraie valeur} - \text{valeur mesurée}|}{|\text{ vraie valeur }|} \cdot 100$$

L'étalonnage peut être simple ou multiple suivant que la valeur de sortie dépend d'une ou de plusieurs grandeurs physiques d'entrée.

3.4 Sensibilité

Connaissant la courbe d'étalonnage, on peut définir la sensibilité de l'instrument au voisinage d'une valeur d'entrée x_1 par la relation

$$K(x_i) = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Cette grandeur permet de mesurer l'influence d'un changement de la valeur d'entrée sur la valeur de sortie. Un bon instrument devra avoir une assez grande sensibilité. Lorsque la sensibilité est constante la réponse de l'instrument est linéaire. Ce type d'instrument sera particulièrement recherché en raison de sa facilité d'utilisation.

La sensibilité devra être aussi indépendante que possible de la fréquence de variation de la grandeur mesurée, du temps et d'autres grandeurs d'influence.

3.5 Précision

La précision d'une mesure est l'accord (ou la différence) entre le résultat d'une mesure et la vraie valeur du mesurande (la valeur du mesurande n'est en général pas exactement connue).

3.6 Répétabilité

Une mesure est répétable lorsque l'on vérifie la proximité de l'accord entre les résultats des mesures successives du même mesurande, effectuées dans les mêmes conditions de mesure:

- même procédé de mesure,
- même observateur,
- même instrument de mesure, utilisé dans les même conditions
- même emplacement,
- répétition sur une courte période de temps.

La dispersion des résultats permet de quantifier la répétabilité.

3.7 Reproductibilité

Une mesure est reproductible lorsque l'on vérifie la proximité de l'accord entre les résultats des mesures du même mesurande, effectuées dans des conditions de mesure différentes – à définir au cas par cas.

3.8 Les méthodes générales de mesures

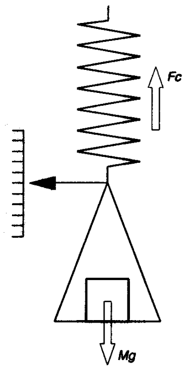
3.8.1 Mesures par déviation

C'est la méthode qui consiste à obtenir la déviation d'un système, d'une position d'équilibre qu'il occupait en l'absence de mesurande, à une nouvelle position d'équilibre qu'il occupe en présence du mesurande. L'écart entre les deux positions fournit plus ou moins directement la mesure.

Dans la méthode de **déviation ou d'élongation simple**, les deux positions sont des positions au sens géométrique du mot; elles ne mettent pas en jeu un équilibre particulier de force. Ainsi en est-il de la mesure d'une longueur au pied à coulisse, où l'opérateur déplace les palpeurs pour venir en contact entre eux (zéro), ou sur la pièce (mesure).

Dans la méthode **d'élongation et d'équilibre spontané**, les positions d'équilibre sont le résultat d'une opposition entre deux forces égales.

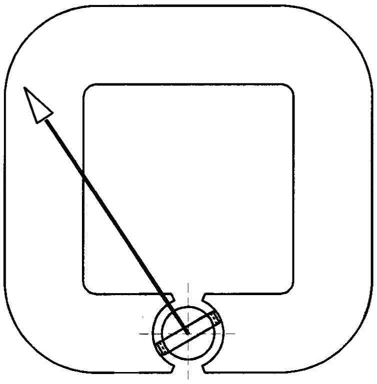
L'exemple typique d'une mesure par déviation est le **peson à ressort**. Les transmissions et transformations d'énergie se font sans intermédiaire. Lorsque l'on suspend une masse sur le plateau fixé à une extrémité d'un ressort vertical, l'autre étant fixe. Les forces de contraintes, dont le ressort devient le siège quand il est déformé, sont proportionnelles à l'allongement. Il existe une valeur d'allongement pour laquelle ces forces égalent le poids du corps, et c'est cette valeur qui indique le poids. On peut certes calculer les forces développées à partir des caractéristiques du ressort, mais il est plus simple et plus précis de tarer le ressort avec des masses connues.

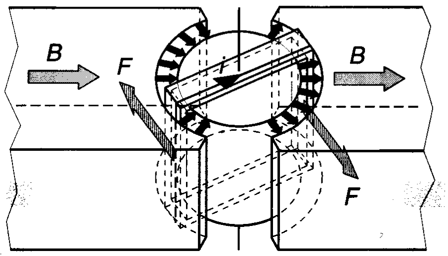


Les appareils qui utilisent la méthode de déviation sont innombrables dans tous les domaines de la métrologie appliquée. Quelques types élémentaires sont mentionnés dans le tableau ci-dessous:

Appareil	**Grandeur d'entrée (mesurande)**	**Grandeur d'opposition**	**Grandeur de sortie (mesure)**
Peson à ressort	force	contrainte ressort	allongement
Peson à contrepoids	force	moment d'une force	angle
Baromètre à mercure	pression	pression hydrostatique	différence de niveau
Thermomètre à gaz à pression constante	température	volume	déplacement d'un niveau

Le **galvanomètre à cadre mobile** est un autre exemple historique de méthode par déviation. En effet, c'est l'égalité du couple produit par les forces électromagnétiques et celui créé par la torsion du fil de suspension du cadre qui définit la déviation qui donne la mesure. Le système se déforme jusqu'à ce que cet équilibre soit atteint. Mais dans ce cas la transformation et transmission d'énergie sont moins directes que dans le peson. Le premier effet de la tension électrique appliquée aux bornes du cadre sera d'instaurer un courant continu qui dépend des constantes électriques du circuit. Le courant, plongé dans un champ magnétique convenable, crée des forces électromagnétiques utilisables par leur effet moteur sur une structure inerte et élastique (le couple de rappel du fil de torsion). Le déplacement s'opérera selon une loi (fonction du temps) qui dépend des constantes mécaniques du système.





Mentionnons quelques **précautions** exigées par l'emploi de la méthode par déviation:

- **Mise à zéro**: la mesure est fournie par l'écart à partir d'une position d'origine prise comme zéro. Il est donc important de vérifier que l'instrument indique effectivement zéro en l'absence de mesurande. Sinon il faudra noter la position de départ qui est un "faux zéro". Les instruments électroniques, les thermomètres, les manomètres présentent souvent des décalages de zéro (en anglais *offset*) dont il faut tenir compte.
- Il faut attendre que l'**équilibre soit atteint**.
- Il faut aussi porter attention aux **conditions de linéarité.**

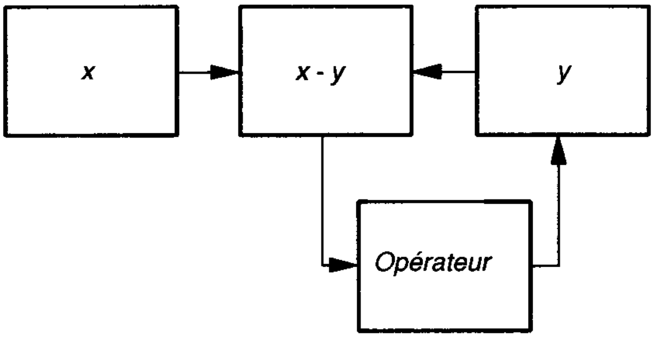
En effet, la loi la plus avantageuse qui puisse relier le mesurande et la mesure, tant pour son interprétation immédiate que pour son traitement ultérieur, est une **relation linéaire**. C'est elle que l'on cherche généralement à obtenir. Un bon moyen d'y parvenir est de n'utiliser que des transducteurs linéaires dans la chaîne. Les transducteurs possèdent en général la qualité de linéarité dans un domaine plus ou moins étroit, généralement au voisinage du zéro, domaine appelé **plage de linéarité**, dont il ne faut pas déborder.

Cependant, si le système de mesure comporte à sa suite un traitement numérique, il est possible d'introduire dans le programme traitant les mesures la courbe de réponse du capteur, ce qui élimine tous les problèmes de linéarisation – voir aussi le chapitre 3.3.

3.9 Mesures par comparaison

Les mesures par comparaison couvrent un très large nombre de mesures de toutes grandeurs. Le principe général est de comparer le mesurande x à une grandeur connue de même nature y pour obtenir $x = y$ ou $x - y = 0$.

Cette grandeur de comparaison est parfois réglée par un opérateur – dont le rôle est celui d'un **asservissement** et peut être tenu par un dispositif automatique - qui agit sur y pour obtenir que la valeur de (x-y) formée par le **détecteur d'écart** soit nulle.

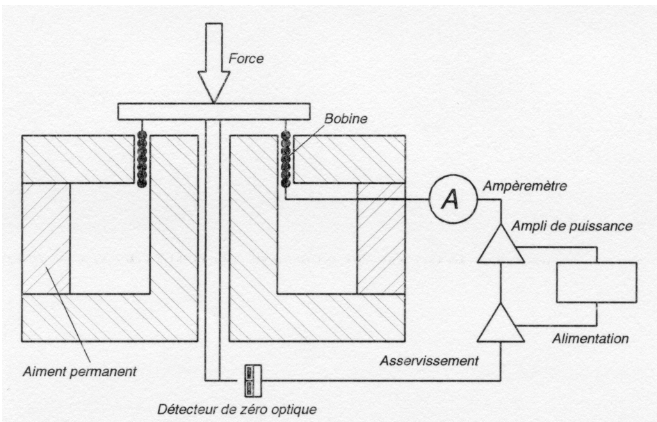


3.9.1 Méthode d'opposition ou méthode de zéro

Une balance de Roberval possède tous les organes d'un appareil de zéro: le soustracteur (fléau), le détecteur d'écart (l'aiguille), la grandeur d'opposition (boîte de poids).

C'est l'opérateur qui apprécie l'écart puis dépose ou retire les poids pour obtenir l'équilibre.

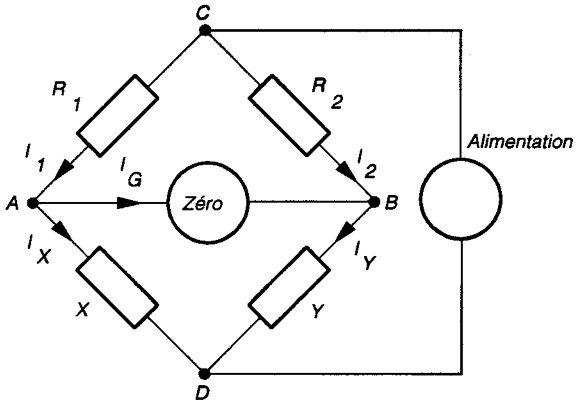
Un autre exemple de méthode de zéro par asservissement est présenté dans la figure ci-contre: il s'agit d'un dynamomètre électromagnétique. L'équilibre de la force présente sur le plateau est réalisé par une force électromagnétique grâce à un dispositif analogue à celui d'une bobine de haut-parleur. On imaginera aisément le circuit comprenant le détecteur d'écart, la source d'énergie, l'amplificateur de puissance réglant l'intensité du courant, l'ampèremètre fournissant la valeur du poids.



3.9.2 Les montages en pont

Le montage en pont est un montage différentiel qui soustrait les réponses de deux bras contigus. Ceci permet de s'affranchir de l'influence de certaines grandeurs parasites qui pourraient masquer le phénomène auquel on porte intérêt.

Un pont est présenté traditionnellement comme un quadrilatère et deux diagonales. Les 4 côtés du quadrilatère constituent les bras. Une des diagonales (CD) contient l'alimentation en énergie; l'autre (AB) l'appareil de zéro. Lorsque la mesure d'une grandeur passive est faite par la méthode de déviation, les alimentations doivent avoir un niveau connu puisque la déviation leur est proportionnelle.



Pont de Wheatstone pour la mesure des résistances électriques.

Dans les montages en pont on est ramené en fait à la comparaison des valeurs des grandeurs passives qui constituent les bras, et par suite le niveau de l'unique source peut être quelconque à l'équilibre.

L'application du pont de Wheatstone à la mesure des résistances électriques et de capeturs résistifs en général comme les **jauges extensométriques** (*strain gauges*) est bien connue. Mais les montages en pont se rencontrent dans bien d'autres mesures.

La jauge active est soumise à l'action conjointe de l'allongement et de la température alors que la jauge témoin, collée au voisinage de la précédente, n'est soumise qu'à l'action de la température.

3.9.3 Méthode de déviation constante

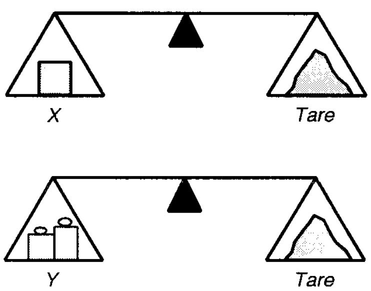
C'est encore une variante de la méthode de comparaison, mais ici la grandeur de comparaison conserve une valeur constante. On ajoute au besoin au mesurande la quantité nécessaire pour atteindre la valeur fixée: $x + y =$ constante.

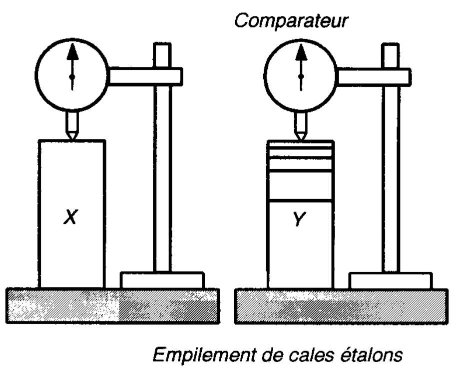
Cette méthode se retrouve en plusieurs variantes.

Méthode de substitution

Au mesurande on substitue une grandeur connue qui doit provoquer un effet identique. Puisqu'il s'agit de comparer deux effets successifs, il faut qu'un organe garde la trace du premier effet; il peut prendre dans certains appareils une place très importante, sous le nom de mémoire.

Dans le cas du peson, par exemple, on décroche le poids inconnu et on le remplace par des poids marqués pour retrouver l'indication précédemment notée.





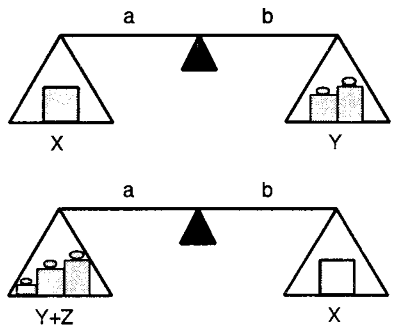
Pour une balance on fait l'équilibre avec une tare, puis on substitue des poids marqués à l'objet à peser. Cette méthode porte le nom célèbre de Borda. C'est la tare qui fait office de mémoire.

La méthode s'étend à toutes sortes de mesures: de différence de potentiel dans certains convertisseurs analogique-numérique, de radioactivité, de longueur, etc. En contrôle dimensionnel, il est classique de substituer à la pièce dont la cote inconnue est gardée en mémoire sur un **comparateur**, un empilement de cales dont les dimensions sont bien connues, jusqu'à ramener le comparateur à la même indication.

Méthode de permutation

Lorsqu'on utilise un appareil qui réalise l'égalité

ax = by, il faut en principe connaître a/b pour avoir la mesure. Cependant, il est possible d'éliminer le facteur a/b en effectuant deux mesures selon le schéma indiqué dans la figure ci-contre. L'équilibre des moments donne:



$$\mathrm{a}\cdot x\cdot g = \mathrm{b}\cdot y\cdot g \quad \text{et} \quad \mathrm{a}\cdot (y+z)\cdot g = \mathrm{b}\cdot x\cdot g$$

en divisant membre à membre on obtient

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x}$$

Soit finalement:

$$x = \sqrt{y(y+z)}$$

Appliquée aux balances à bras légèrement inégaux, cette méthode porte le nom célèbre de Gauss.

Appareils à seuil

On se propose de connaître l'instant, ou les conditions, auquel la grandeur x atteint une valeur prédéterminée. Ceci se rencontre en particulier lorsqu'on cherche à régler une variable à une valeur donnée (régulation), mais se rencontre aussi dans de nombreux processus métrologiques.

La grandeur de comparaison a une valeur fixe et le détecteur de zéro se trouve bloqué par son action tant que le mesurande ne la surpasse pas. L'exemple typique en sont les accéléromètres des airbags.

3.10 Comptages

Il est très fréquent d'avoir à compter une certaine quantité d'éléments (nombre de tours, nombre d'impulsions, nombre de particules, etc.). La mesure se réduit alors à un comptage.

La fréquence de comptage des systèmes mécaniques ne dépasse pas quelques centaines de hertz; celle des compteurs électroniques dépasse 10 GHz.

3.11 Avantages et inconvénients des mesures par déviation et par comparaison

Les caractères de mesures par déviation et ceux des mesures par comparaison sont très différents. Le bilan sera dans l'ensemble favorable aux dernières, qui n'ont guère contre elles que leur relative complication et leur prix.

C'est le **détecteur d'écart** qui donne aux mesures par comparaison l'essentiel de leur caractère. C'est l'absence d'exigences métrologiques à son égard, par opposition aux exigences formées pour les instruments de mesure par déviation, qui rend les mesures par comparaison plus précises que celles par méthode de déviation.

En effet dans les méthodes de zéro, le repérage de la position zéro est assuré par le **détecteur d'écart** qui fournit le **signal d'erreur** dont seuls l'existence et le signe nous intéressent. Ce fait permet de simplifier à l'extrême le détecteur sans exiger de lui des qualités métrologiques poussées. Il suffit que sa position d'équilibre soit stable, qu'il soit **fidèle au zéro**.

Dans tout instrument de mesure, la **justesse** est limitée par les défauts intrinsèques de l'instrument. Ces défauts se retrouvent évidemment aussi bien dans les mesures par déviation que dans les mesures par comparaison. Dans le cas des balances, l'influence des erreurs d'étalonnage, des erreurs sur les masses utilisées, des erreurs sur le parallélisme des couteaux, des erreurs sur les bras du fléau, etc. se retrouvent dans les deux cas. Il n'en va pas de même des erreurs de lecture.

Dans la mesure par déviation, l'**erreur de lecture** représente en effet une fraction donnée de l'étendue de mesure, généralement de l'ordre de 1 à 0.1%.

Or que dans la **méthode de zéro**, la partie principale de la mesure porte sur des grandeurs quantifiées connues avec exactitude et leur somme ne peut être entachée d'aucune erreur (sauf de grossières erreurs, baptisées parasites par les normes, et qui sont en général faciles à dépister). L'erreur de lecture ne porte que sur l'évaluation du zéro, obtenue d'une manière précise par coïncidence. Pratiquement on la trouve au moins 100 à 1000 fois plus petite que l'erreur de la mesure par déviation.

Toutefois, l'usage de la méthode de déviation paraît plus simple, donc plus prompte. Par exemple, le corps à peser est posé sur le plateau et il suffit d'attendre un temps suffisant que l'élongation ait le temps de se stabiliser et que les oscillations soient amorties.

Or que la méthode de zéro suppose une série d'opérations qui comprennent la constatation d'un écart, l'application de la contre-réaction puis l'attente d'un nouvel équilibre.

Toute mesure consomme de l'énergie. Mais il y a aussi de ce point de vue une grande différence entre la méthode de déviation et la méthode de zéro. Dans le premier cas l'énergie correspond à la déformation du système de mesure de sa position zéro à sa position d'équilibre final. Dans le second cas, elle ne correspond qu'à la déformation nécessaire pour observer l'écart.

Si on évalue la tension d'une pile avec un voltmètre à cadre, il y a passage d'un courant tant que dure la mesure et consommation d'énergie. Si au contraire on utilise la méthode d'opposition, aucun courant ne circule dans le galvanomètre de zéro et il n'y a aucune consommation d'énergie (donc aucune déformation du phénomène) que celle qui peut correspondre au plus petit écart discernable du galvanomètre. L'instrument de mesure se comporte comme s'il avait une impédance infinie.

4 Mesure, erreurs, incertitudes

Tout système de mesure est inéluctablement attaché d'erreurs. Un système de mesure n'est jamais parfait puisqu'il est en général plus ou moins sensible à l'environnement (température, pression, humidité...), il n'est pas fidèle et même les étalons servant à l'étalonnage de l'instrumentation ne sont qu'une matérialisation imparfaite de la définition de l'unité qu'ils sont chargés représenter, la mauvaise définition de la grandeur est elle-même une source d'erreur.

De manière générale, le but de la mesure est d'évaluer une variable physique appelée **variable mesurée** ou **mesurande**. Le but du système de mesure est donc la quantification de la variable mesurée, c'est l'opération de mesurage. Ce que l'on obtient en pratique est la valeur donnée par l'instrument de mesure. L'exactitude de la mesure se définit à partir de la différence entre la valeur donnée par l'appareil de mesure et la valeur réelle de la grandeur mesurée.

Toute la difficulté consiste donc à avoir une valeur donnée par le processus de mesure qui soit la plus proche possible de la vraie valeur physique qui reste généralement inconnue. Il est cependant essentiel de pouvoir estimer l'**erreur probable** que l'on commet durant le processus de mesure afin de pouvoir garantir que la valeur donnée par l'appareil de mesure ne diffère pas de la vraie valeur d'une quantité supérieure à une grandeur fixée et connue.

4.1 Exemples de causes d'erreur

Très en général, les erreurs peuvent se classer en trois types:

1. Les erreurs d'étalonnage
   - Erreur par rapport aux étalons primaires
   - Erreur due à la technique d'étalonnage
2. Erreur d'acquisition de données
   - Erreur due aux capteurs
   - Erreur due à l'appareil de mesure
   - Erreur due aux variables non contrôlées
3. Erreur due à l'analyse des données
   - Erreurs dus au lissage (i.e. méthode des moindres carrés)
   - Erreur de troncature

On donne ici ensuite quelques descriptions et exemples des causes d'erreur plus fréquentes.

4.1.1 Erreur d'étalonnage

L'étalonnage a pour but de réduire les erreurs mais ne peut pas les éliminer complètement. La grandeur étalon utilisée pour étalonner le système n'est pas parfaite et engendre une petite erreur de même que la mise en œuvre de la procédure d'étalonnage.

4.1.2 Hystérésis

On peut balayer la plage de valeurs d'entrée d'un système en partant de la plus petite valeur vers la plus grande ou au contraire de la plus grande vers la plus petite. Pour une même valeur d'entrée le système peut donner deux valeurs différentes suivant le sens de balayage.

On définit alors l'erreur d'hystérésis par

$$\%e_{\max} = \frac{y_{haut} - y_{bas}}{y_{\max}} \cdot 100$$

Ce phénomène peut être produit par exemple par des effets de viscosité ou de charge électrique résiduelle dans le système.

4.1.3 Erreur de linéarité

Beaucoup d'instruments sont conçus pour fournir une relation linéaire entre la valeur physique entrée dans le système et la valeur lue en sortie. Mais comme les systèmes réels ne sont jamais parfaitement linéaires, une erreur est introduite à ce niveau et peut être estimée par

$$\%e_L = \frac{y_L - y}{y_{\max}} \cdot 100$$

où y_L est la valeur du système linéaire, y la valeur réelle de sortie et $y_{\max}$ la valeur maximale fournie par l'instrument.

4.1.4 Erreur de sensibilité

La valeur mesurée est définie à partir du signal fourni par le capteur grâce à la mesure préalable de la sensibilité du système. Les erreurs de précision, par exemple, limitent la connaissance possible de la sensibilité du système qui n'est connue qu'avec une certaine indétermination. Cela définit l'erreur de sensibilité.

4.1.5 Erreur due à la résolution de l'instrument

L'erreur due à la résolution de l'instrument peut être évaluée par

$$u_{\text{res}} = \pm\tfrac{1}{2}\ \text{résolution}$$

où la résolution est la plus petite valeur mesurable par l'instrument.

4.1.6 Grandeurs d'influence

Le système peut, lors de son utilisation, être soumis non seulement au mesurande mais également à d'autres grandeurs physiques dont les variations peuvent influencer la valeur de la grandeur de sortie (électrique). Ces variations sont impossibles à distinguer de l'action du mesurande.

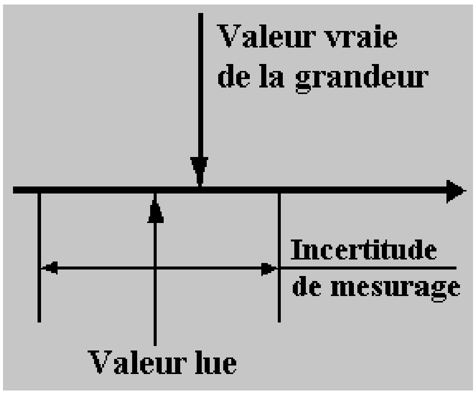
Les principales grandeurs d'influence sont la température (qui a des effets électrique, mécanique, géométrique), la pression, l'accélération et les vibrations (déformations, contraintes), l'humidité (constante diélectrique, résistivité, isolation électrique), les champs magnétiques variables ou statiques (f.e.m., résistivité), la tension d'alimentation, l'amplitude et la fréquence (grandeur de sortie électrique).

Pour tenter d'éviter ces problèmes il faut mettre tout en œuvre pour réduire leur importance et si cela n'est pas possible, il faut au minimum stabiliser les grandeurs d'influence et effectuer un étalonnage aussi précis que possible.

4.2 Définitions d'erreur et d'incertitude en métrologie

L'**erreur de mesure** est définie comme la **différence** entre la v**aleur annoncée** et la **valeur vraie** qui reste inconnue. Cette valeur annoncée sera généralement obtenue par une opération de moyenne de plusieurs mesures.

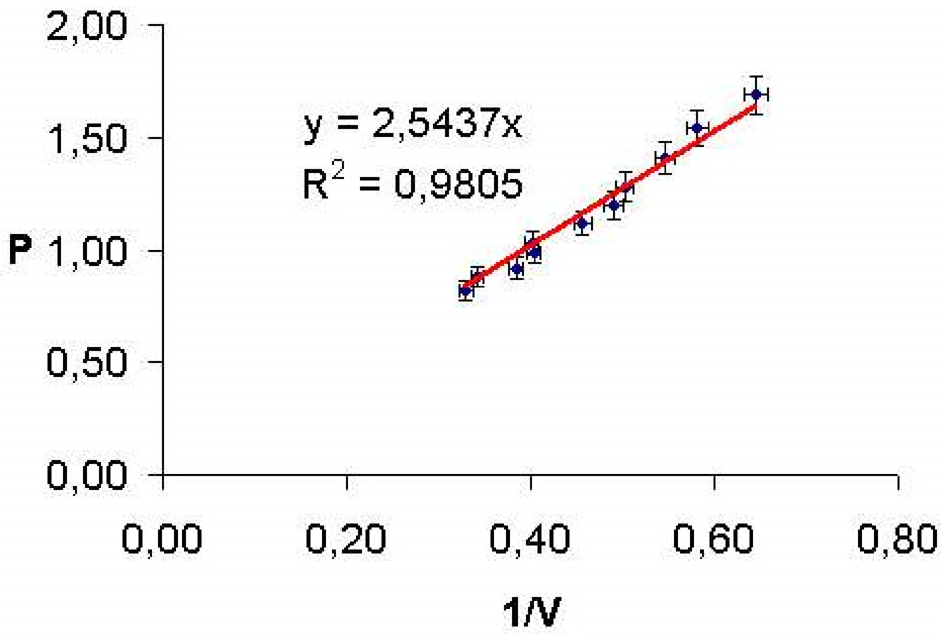
L'**incertitude de mesure** décrit une région autour de la **valeur lue ou observée** (souvent elle-même une moyenne de plusieurs mesures individuelles) d'une quantité physique, dans laquelle **on estime** que se trouve la vraie valeur.



L'incertitude de mesure sera en général décrite par la notation suivante:

Résultat de la mesure = Valeur annoncée ± incertitude [unités]

L'incertitude de mesure peut aussi être décrite par des barres d'erreurs sur un graphique.



Exemple de graphique avec barres d'erreur (incertitude)

L'incertitude affichée peut être :

- **Incertitude absolue** U_X, qui a les mêmes unités que la grandeur X
- **Incertitude relative** $U_r = U_X/X$, qui est sans dimensions et souvent donné en %.

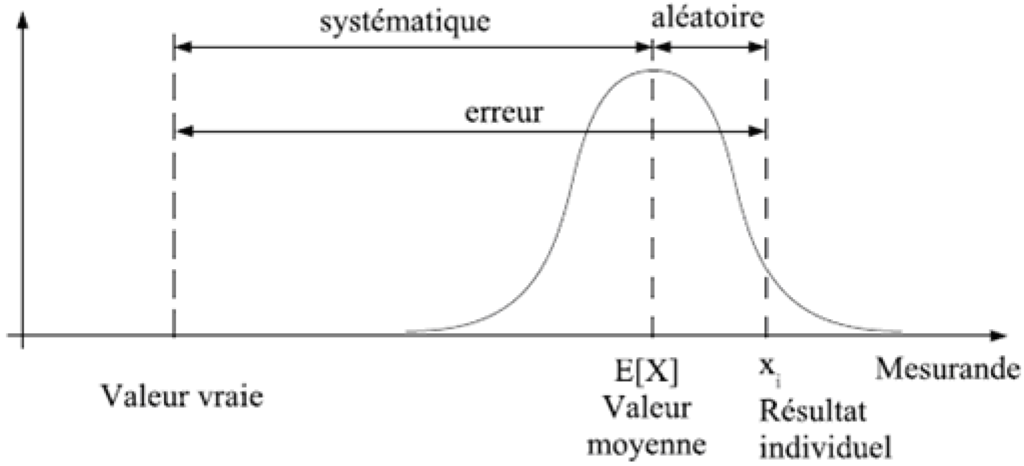
L'incertitude comprend, en général, les effets d'erreurs systématiques et aléatoires, et dépend de la précision et résolution de l'instrument.

Les **effets d'erreurs de type aléatoire** sont évalués à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écart-types expérimentaux.

Les **effets d'erreurs de type systématique**, quand ils ne peuvent pas être corrigés, sont évalués en admettant des distributions de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

4.3 Types d'erreurs

Il est toujours possible de décomposer le terme **erreur*s*** en une erreur systématique et une erreur aléatoire:



L'**erreur systématique** (notée e_s) est la moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans des conditions de **répétabilité**, moins la valeur vraie du mesurande.

En général, et à moins que l'instrument ne puisse être considéré d'une précision parfaite,, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent être connues qu'en partie.

L'**erreur aléatoire** (notée e_a) est défini comme le résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande (grandeur physique) effectués dans des conditions de répétabilité (tout reste identique).

Comme on ne peut faire qu'un nombre limité (fini) de mesurages, il est seulement possible de déterminer une **estimation** de l'erreur aléatoire. Cela veut dire que l'erreur aléatoire a elle-même une incertitude associée à sa quantification.

A cela doivent s'ajouter les **erreurs grossières**, qui sont dues à des conditions anormales ou à des fautes techniques, et qui se manifesteront généralement par des valeurs mesurées considérablement différentes de toutes les autres erreurs.

4.3.1 Erreurs systématiques

Erreurs systématiques connues

Les erreurs systématiques connues (e_{sc}) d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe. Les normes (ex. DIN1319) en fournissent d'autres désignations telles que: erreurs systématiques avec signe connu, erreurs systématiques pures, erreurs corrigeables.

Les erreurs systématiques connues peuvent être corrigées dans le résultat. Lorsque la correction a été effectuée, les erreurs systématiques connues ne font plus partie de l'indication d'incertitude de mesure.

Exemples d'erreurs systématiques connues:

- Les erreurs vérifiées de graduation d'échelle sont manifestement des erreurs systématiques.
- Une cale-étalon qui est plus longue de 0,7 µm que la valeur nominale indiquée.
- Une mesure de longueur qui est effectuée à la température de 25°C au lieu de la température de référence de 20°C; cela produit une erreur systématique à la suite de la dilatation thermique de l'objet.
- Un palmer qui possède des touches de palpage présentant une usure mesurable.
- Le tachymètre d'une voiture qui présente une indication de 5 km/h trop élevée dans un certain secteur.
- Un voltmètre dont on a vérifié qu'il possède un facteur d'amplification erroné ou indique une valeur trop élevée de 0,1V dans toutes ses mesures.

Erreurs systématiques inconnues

Il existe aussi des erreurs systématiques inconnues (e_{si}) qui sont généralement dues à des imprécisions des instruments: celles-ci sont normalement définies en termes de valeurs (ou tolérances) maximums, souvent avec le signe ±. Il se peut que ces erreurs soient constantes dans une série de mesures avec un équipement particulier, mais on ne connaît ni leur valeur ni leur signe. On définit donc souvent les erreurs systématiques inconnues comme **erreurs de tolérance**.

Les méthodes pour prendre en compte les erreurs systématiques inconnues dans un calcul global d'incertitude font l'objet d'études et de controverses depuis près de 200 ans, et le sujet reste controversé encore aujourd'hui.

On présente dans ce cours l'approche de *ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (abrévié **GUM**). Essentiellement l'idée de GUM est de « transformer » les erreurs systématiques inconnues en erreurs aléatoires, en postulant une distribution statistique ad hoc, généralement rectangulaire.

4.3.2 Erreurs aléatoires

On distingue ici deux catégories principales:

A. Les erreurs aléatoires qui peuvent être évaluée rigoureusement par des méthodes statistiques.

B. Les erreurs systématiques inconnues « converties » en erreurs pseudo-aléatoires (réf. page précédente) et qui demandent pour leur évaluation la prise en compte additionnelle d'aspects non-statistiques tels que les caractéristiques et tolérances techniques de l'instrument, la précision et fiabilité de l'étalonnage, l'expérience de l'opérateur, etc..

Erreurs aléatoires qui peuvent être évaluée par des méthodes statistiques (type A[2])

Ces erreurs aléatoires sont en général dues à des **fluctuations des conditions environnementales** (au sens large, ce qui inclut l'opérateur et l'instrument) au cours de la mesure. Ces erreurs au cours d'une série de mesures sont par conséquent inconnues, tant du point de vue de leur intensité que de leur signe.

Lors de mesures répétées au cours d'une série, on trouve que:

1. Les erreurs aléatoires fluctuent de manière imprévisible par rapport à une valeur moyenne.
2. L'incertitude de la moyenne diminue avec le nombre de mesure.

On qualifie ces erreurs aléatoires, qui ont souvent une distribution normale (voir pages 41 et suivantes), par leur écart-type.

Exemples d'erreurs aléatoires de ce type:

- Les jeux des roulements ainsi que les flexions d'arbres de dispositifs mécaniques.
- Les jeux d'articulations de palpeurs.
- Les erreurs de lecture des graduations d'un microscope de mesure en raison d'une netteté insuffisante de ces dernières.
- Des erreurs de positionnement d'un palpeur sur l'objet à mesurer au cours d'une série de mesures.
- Fluctuation de la température ambiante par exemple à la suite de la régulation thermostatique ou par ouverture et fermeture répétée d'une porte du local de mesure. Une fluctuation de la température de l'objet à mesurer peut également intervenir à la suite d'une manutention plus ou moins longue de ce dernier avec la main ou le doigt.
- Influence de la fluctuation imprévisible de champs électrique et magnétique sur l'indicateur d'appareils électriques en proximité d'autres instruments de mesure.
- Bruit d'instruments électroniques produisant des fluctuations du signal transmis.
- Influence de vibrations mécaniques sur l'instrument de mesure.

[2)] La dénomination de méthodes de type A ou B se réfère à la *ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)* – voir le chapitre 7.

Erreurs pseudo-aléatoires demandant des méthodes non-statistiques (type B)

Parmi telles erreurs sont typiquement les **tolérances des instruments de mesures**. Leur amplitude ainsi que leur signe au moment d'une mesure déterminée sont inconnus. Toutefois leur présence ainsi que l'intensité maximale (**tolérance**) est connue.

Dans le cadre de mesures répétées dans une série de mesures, il se peut que ces erreurs systématiques inconnues aient toujours la même valeur et le même signe. Le problème est que cette valeur ainsi que le signe sont inconnus: on en connaît en général que la valeur **maximale** que l'on caractérise par le signe ±.

Exemples d'erreurs de ce type:

- La résolution d'un affichage numérique.
- La vis micrométrique d'un palmer possède une tolérance connue du pas de 0,3µm. On ne sait cependant pas si le vrai pas est trop grand ou trop petit.
- Le cas où, dans le cadre d'une mesure de longueur, la température de l'objet n'est pas mesurée. On sait cependant qu'au cours des mesures, la température se trouvait dans la tolérance de ±1°C par rapport à la température de référence de 20°C.
- Une jauge qui possède une grandeur nominale de 30,000 mm et une indication de tolérance de ±1µm.

On peut remarquer que les erreurs de type B se distinguent des erreurs de type A par le fait qu'elles ne peuvent normalement pas être diminuées en augmentant le nombre de mesures effectuées.

Les erreurs de ce type peuvent être déterminées ou estimées de plusieurs manières, selon le cas:

- A partir des caractéristiques (*datasheet*) de l'instrument. Par exemple, si d'après les caractéristiques fournies par le constructeur, la linéarité d'un voltmètre est de 0,1% de la gamme de mesure de 300 V, il en résulte une erreur systématique inconnue de ±0.3 V, à laquelle on associera une distribution rectangulaire.
- Comparaison avec un instrument de mesure **au moins dix fois plus précis**.
- Calcul des tolérances à partir des tolérances mécaniques et des relations géométriques de l'instrument de mesure, par exemple dans le cas de basculement de systèmes de guidage ou de dilatation thermique.

4.3.3 Erreurs grossières

Après chaque série de mesures, il faut détecter et éliminer les erreurs grossières. La raison de ces dernières doit aussitôt être élucidée de manière à ce que cette situation ne se reproduise plus au cours des séries de mesures suivantes. Si elles ne sont pas **éliminées** elles peuvent influencer considérablement la valeur moyenne et l'écart-type d'une série de mesures.

Exemples d'erreurs grossières:

- Les premières valeurs d'une série de mesures peuvent être erronées si l'appareil de mesure ne fournit des valeurs fiables qu'après un certain temps d'échauffement.
- Fausse lecture d'une mesure: par exemple par une erreur de virgule ou du facteur x10, x100 affiché.
- Les éléments d'une chaîne de mesure ne sont pas correctement adaptés en impédance.
- Tension d'alimentation fausse ou fluctuante.
- Choc contre l'instrument de mesure au cours du mesurage.
- L'appareil utilisé est défectueux en raison d'une chute antérieure.
- Mauvaise manipulation de l'appareil en raison de la méconnaissance du mode d'emploi de ce dernier.

5 Dispersion statistique

Si l'on mesure plusieurs fois le même phénomène avec un appareil suffisamment précis, on obtiendra chaque fois un résultat différent x_i. Ceci est dû à des phénomènes perturbateurs ou, pour les mesures extrêmement précises, à la nature aléatoire du phénomène (chaos, incertitude quantique).

Cette dispersion statistique des **erreurs aléatoires** peut être caractérisée par certaines paramètres, aussi appelées **positions**.

En mesure physique et en métrologie, on va en général au minimum calculer deux valeurs:

- la **moyenne**, qui représentera la **valeur annoncée** de la mesure, appelée aussi **espérance** en statistique;
- l'**écart type** qui (en général multiplié par un facteur approprié) permet d'estimer l'**incertitude de mesure**.

Plus en général, on va vouloir avoir une description plus fine de la **distribution** des valeurs, et donc calculer d'autres positions.

5.1 La moyenne

La **moyenne arithmétique** est la moyenne « ordinaire », c'est-à-dire la somme des valeurs numériques (de la série) divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

5.2 Autres types de moyenne

La **moyenne géométrique** est définie de la manière suivante:

$$\bar{x} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

On peut illustrer la moyenne géométrique avec les deux cas suivants:

- Si l'inflation d'un pays est de 5% la première année et de 15% la suivante, l'augmentation moyenne des prix se calcule grâce à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,05 et 1,15 soit une augmentation moyenne de 9,88% et non grâce à la moyenne arithmétique 10%.
- Le carré (c'est-à-dire le rectangle moyen à deux côtés égaux) qui a même surface (le total considéré ici) qu'un rectangle de côtés 3 et 7 a pour côté la moyenne géométrique des deux côtés du rectangle $\sqrt{3 \cdot 7} = 4{,}5826$.

La **moyenne harmonique** est définie de la manière suivante:

$$\bar{x} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

Dans certains cas, la moyenne harmonique donne la véritable notion de "moyenne". Par exemple, si pour la moitié de la distance d'un trajet vous voyagez à 40 km/h, et que pour l'autre moitié vous voyagez à 60 km/h, votre vitesse moyenne est alors donnée par la moyenne harmonique de 40 et 60, ce qui donne 48. Votre temps de voyage total est donc le même que si vous aviez voyagé à 48 km/h sur l'ensemble de la distance (attention toutefois, si vous aviez voyagé la moitié du temps à une vitesse, et l'autre moitié du temps à une autre vitesse, la moyenne arithmétique, dans ce cas 50 km/h, vous aurait donné la bonne moyenne).

De même, si un circuit électrique a deux résistances reliées en parallèle, la première faisant 40 Ω et l'autre 60 Ω, la résistance moyenne des deux est 48 Ω; la résistance totale du circuit est la même que si les deux résistances en parallèle étaient remplacées par des résistances de 48 Ω (attention, cette résistance moyenne n'est pas la résistance équivalente, qui est elle de 24 Ω, et qui correspond à remplacer les deux résistances en parallèle par une seule résistance de 24 Ω).

La **moyenne glissante**, ou **moyenne mobile**, définie comme

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i-1} \cdot (i-1) + x_i}{i}$$

est un type de moyenne statistique utilisée pour analyser des séries ordonnées de données, le plus souvent des séries temporelles, en supprimant les fluctuations transitoires de façon à en souligner les tendances à plus long terme. Cette moyenne est dite mobile parce qu'elle est recalculée de façon continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien ou s'ajoute au sous-ensemble.

Ce type de moyenne est utilisé généralement comme méthode de lissage de valeurs, en particulier dans le domaine financier pour l'analyse technique de cours boursiers.

5.3 La médiane

De manière générale, la moyenne n'est pas forcément une manière pertinente de représenter la valeur la plus probable d'une série de données. On peut, par exemple, lui préférer la valeur **médiane** qui est la valeur à laquelle 50% des valeurs observées sont inférieures. La médiane n'est pas (sauf par hasard) équivalente à la moyenne arithmétique de l'ensemble.

En supposant que l'on ait, au préalable, rangé les valeurs observées de sorte qu'elles se trouvent indexées suivant l'ordre des valeurs croissantes, pour un **nombre pair** $N = 2n$ de valeurs, la médiane est la *moyenne* des deux valeurs centrales, soit $(x_n + x_{n+1}) / 2$.

Pour un **nombre impair** $N = 2n+1$ de valeurs, la médiane est unique et égale à x_{n+1}.

5.4 Variance et écart type

En probabilité, la **variance** d'une série de données est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Elle permet de caractériser la dispersion des valeurs par rapport à la moyenne. Ainsi, une distribution avec une même espérance et une variance plus grande apparaîtra comme plus étalée. Le fait que l'on prenne le carré de ces écarts à la moyenne évite que des écarts positifs et négatifs ne s'annulent. La variance σ^2 est toujours positive ou nulle. Ses dimensions sont le carré de celles de la variable mesurée.

Lorsque la variance est nulle, cela signifie que la variable aléatoire correspond à une constante (toutes les mesures sont identiques).

L'**écart type** est la racine carrée de la variance et donc mesure également la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.

En statistiques, plus particulièrement en théorie des sondages, ainsi qu'en métrologie, l'écart type (*standard deviation* en anglais) tente d'évaluer, à partir d'un échantillon soumis au hasard, la dispersion de la population tout entière. On distingue alors l'écart type empirique biaisé[3] et l'écart type empirique corrigé dont la formule diffère de celle utilisée en probabilité.

Les écarts types connaissent de nombreuses applications, tant dans les sondages, qu'en physique (où ils sont souvent nommés *RMS* par abus de langage), ou en biologie. Ils permettent en pratique de rendre compte des résultats numériques d'une expérience répétée.

On distingue l'**écart type empirique**

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} \qquad (1)$$

de l'**écart type empirique corrigé** σ_c d'une série finie de n mesures:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \qquad (2)$$

Pourquoi (N – 1) ?

Le fait que l'estimateur de la variance doive être divisé par (N – 1) - et donc dans un certain sens moins précis - pour être sans biais provient du fait que l'estimation de la variance implique l'estimation d'un paramètre en plus, la moyenne. Cette correction tient compte donc du fait que l'estimation de la moyenne induit une incertitude de plus – voir aussi la section suivante. En effet si l'on suppose que la moyenne est parfaitement connue, l'estimateur (1) est sans biais.

[3] En statistique, un biais est une démarche ou un procédé qui engendre des erreurs dans les résultats d'une étude. Formellement, le **biais** d'un estimateur est l'espérance de la différence entre sa valeur et la valeur de la variable aléatoire qu'il est censé estimer.

Propriétés de l'écart type

- Invariance par translation. L'écart type n'est pas modifié si on ajoute ou retranche une constante à la série statistique.

  Si on a $y = x + C$

  alors $\sigma_y = \sigma_x$

- Stabilité par multiplication par une constante. Si on multiplie une série par une constante positive, l'écart type est multiplié par la même constante.

  Si $y = Kx$

  alors $\sigma_y = K\sigma_x$

- L'écart type est toujours positif et est nul si la série statistique est constante.
- Sensibilité aux valeurs extrêmes: comme la moyenne, l'écart type est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes et il est généralement nécessaire d'**éliminer ces valeurs** avant de faire le calcul de l'écart type.

5.5 Ecart-type de la valeur moyenne

Considérons une série de n mesures x_i, de moyenne $\bar{x}$ et écart type σ.

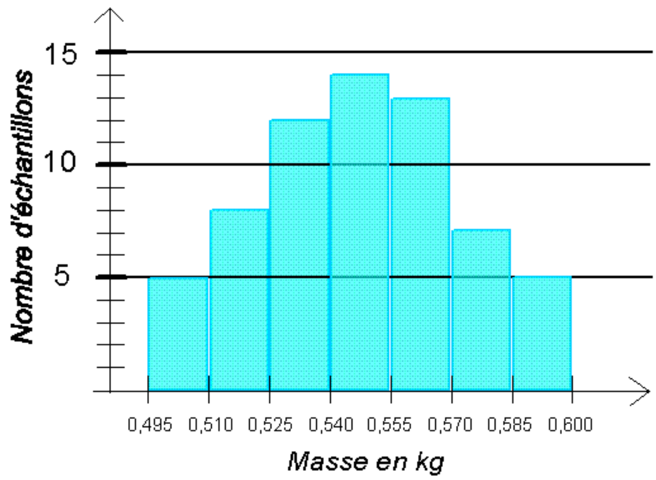
La dispersion attendue sur cette moyenne si on mesurait plusieurs séries de n mesures, donc l'incertitude sur la valeur $\bar{x}$ peut être caractérisée par l'**écart type de la valeur moyenne**, qui peut être estimé à partir de l'écart type d'une seule série de n mesure par:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

5.6 Histogramme

L'histogramme est un moyen simple et rapide pour représenter la distribution d'un paramètre mesuré. Exemples:

- diamètre d'un arbre après usinage,
- dureté d'une série de pièces après un traitement thermique,
- concentration d'un élément dans la composition d'alliages produit par une fonderie,
- masse de préparation alimentaire dans une boîte de conserve,
- répartition de la luminosité des pixels dans une photographie.



Pour pouvoir bien mener l'étude de la dispersion d'un paramètre à l'aide d'un ou de plusieurs histogrammes, il faut avoir une bonne connaissance du paramètre étudié. De même, il faut connaître les conditions de collecte des données: fréquence de mesure, outil de mesure utilisé, possibilité de mélange de lots, possibilité de tri etc.

5.6.1 Construction d'un histogramme

Collecte des données

La première phase est la collecte des données en cours de fabrication. Cette collecte peut être réalisée soit de façon exceptionnelle à l'occasion de l'étude du paramètre soit en utilisant un relevé automatique ou manuel fait lors d'un contrôle réalisé dans le cadre de la surveillance du procédé de fabrication.

Sans qu'il soit réellement possible de donner un nombre minimum, il faut que le nombre de valeurs relevées soit suffisant. Plus l'on dispose d'un nombre élevé de valeurs, plus l'interprétation sera aisée.

Nombre de classes

La première opération est de déterminer le nombre de classes de l'histogramme. Généralement, dans le cadre d'une analyse de ce type, on utilise des classes de largeur identique.

Le nombre de classes dépend du nombre de valeurs N dont on dispose.

Le nombre de classes K peut être déterminé par la formule suivante:

$$K = 1 + \frac{10\log(N)}{3}$$

ou plus simplement

$$K = \sqrt{N}$$

Cependant, l'histogramme étant souvent aussi un outil visuel, il est possible de faire varier le nombre de classes. Ceci permet de voir l'histogramme avec un nombre différent de classes et ainsi de trouver le meilleur compromis qui facilitera l'interprétation. L'utilisation d'un logiciel dédié ou plus simplement d'un tableur facilite cette opération.

Intervalles de classe

L'amplitude w de l'histogramme est

$$w = \text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}$$

L'amplitude h théorique de chaque classe est alors:

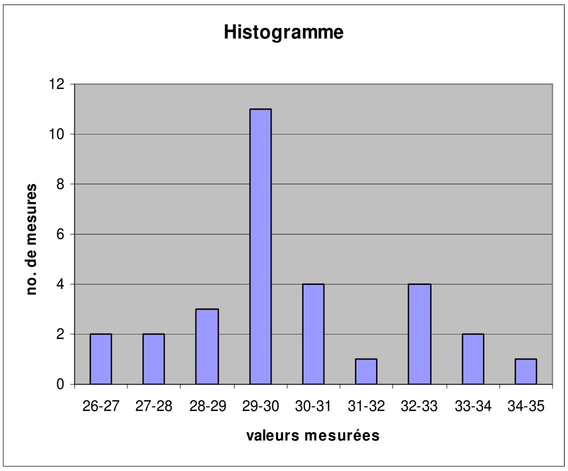
$$h = \frac{w}{K}$$

In convient généralement d'**arrondir** cette valeur à un multiple de résolution de l'instrument de mesure (arrondi à l'excès).

5.7 Diagramme des effectifs cumulés (fonction de répartition)

Ce diagramme peut s'obtenir facilement depuis l'histogramme. Il permet de lire l'effectif d'un **intervalle entre zéro et une valeur quelconque *x*** et, par différence, l'effectif de tout intervalle.

Cette représentation préfigure le tracé de la fonction de répartition en probabilité.



Histogramme

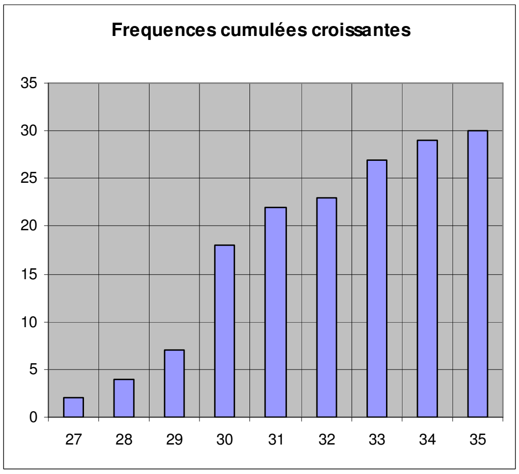


Diagramme des effectifs cumulés

Ce type de diagramme peut indiquer soit le nombre absolu de mesures, soit le pourcentage.

Ce diagramme peut être mis en forme de **polygone des effectifs cumulés** aussi pour des intervalles discrets.

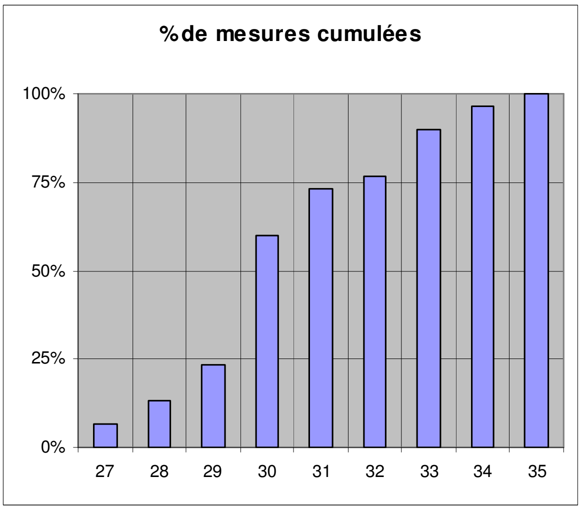
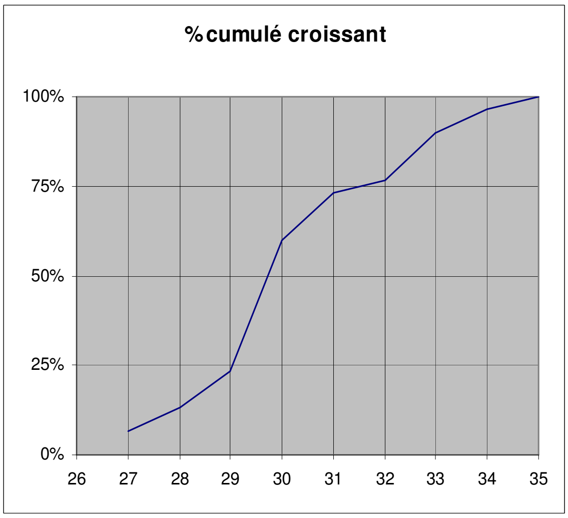


Diagramme des pourcentages cumulés



Polygone des pourcentages cumulés

5.8 Quantiles

Les quantiles sont des points essentiels pris à des intervalles réguliers verticaux d'une fonction de répartition cumulative d'une variable aléatoire. Diviser des données ordonnées en q sous-jeux de données de dimension essentiellement égale est la motivation des q-quantiles; les quantiles sont les valeurs de données marquant les limites entre deux sous-jeux consécutifs.

Certains quantiles ont des noms spéciaux:

- Les 100-quantiles sont appelés centiles ou percentiles selon un anglicisme fréquent;
- Les 10-quantiles sont appelés déciles;
- Les 5-quantiles sont appelés quintiles;
- Les 4-quantiles sont appelés quartiles;
- Le 2-quantile est la **médiane**.

5.9 La loi ou distribution normale ou gaussienne

La distribution de beaucoup de paramètres industriels correspond souvent à une **loi normale**, avec son profil « en cloche » .

Typiquement ce sera la première distribution avec la quelle on va comparer des histogrammes de mesure.

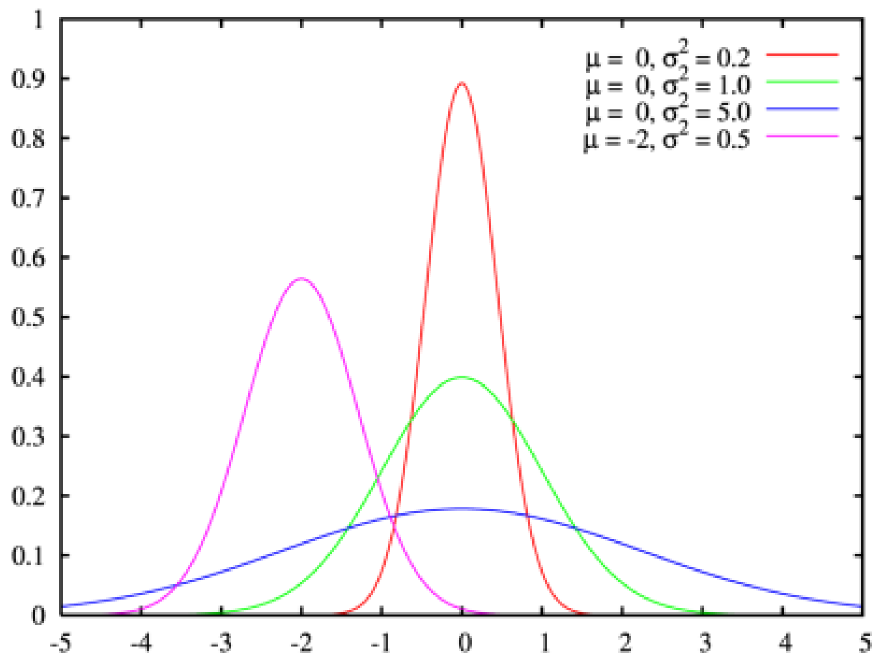
Une variable aléatoire suit une loi normale (ou loi normale gaussienne, loi de Laplace-Gauss) de moyenne μ et d'écart type σ (donc de variance σ^2) si elle admet une densité de probabilité f telle que:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

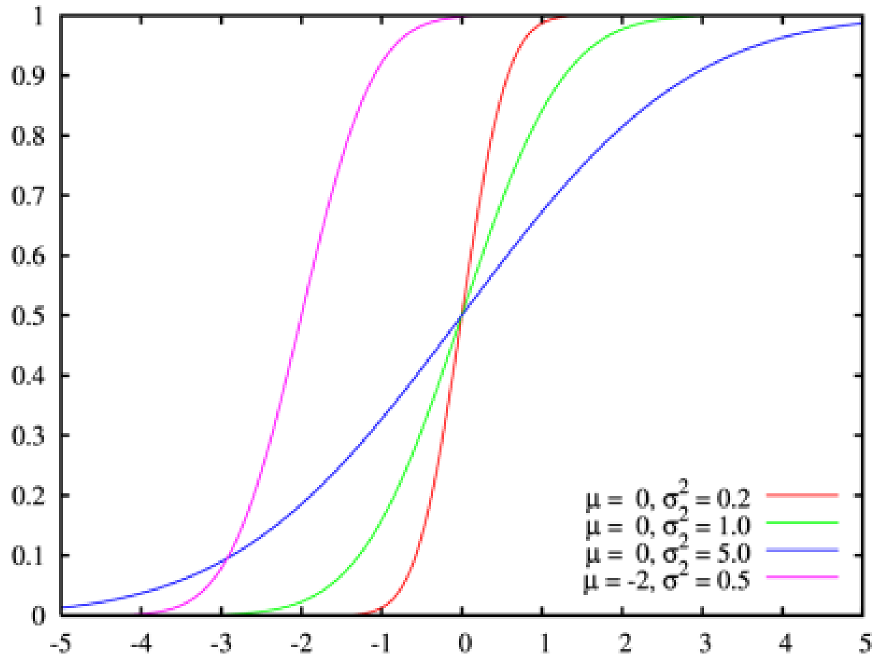
Une telle variable aléatoire est dite **variable gaussienne**.

Le cas où la moyenne est zéro et l'écart type est l'unité (1) est appelée **loi normale centrée réduite**:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$



Densité de probabilité (aussi appelée **fonction de masse**) de quelques distribution normales. La courbe verte (pour σ = 1) représente la **loi normale centrée réduite**.



Fonctions de répartition pour divers moyennes et écart-types.

On note Φ la **fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**.

Elle est définie, pour tout réel *x*, par:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

La fonction de répartition tend vers 0 en $-\infty$; elle s'exprime à l'aide de la **fonction d'erreur**[4].

Il n'existe donc pas d'expression analytique pour Φ mais on peut exploiter avec profit son aspect régulier pour en donner une approximation grâce à un développement en série de Taylor.

Par exemple, une approximation (à l'ordre 5) autour de 0 est

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + 0,3989423\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}\right]$$

Cette approximation est performante pour

$$|\,x\,| < 2$$

[4] En mathématiques, la fonction d'erreur (aussi appelée fonction d'erreur de Gauss) est une fonction utilisée en analyse. Cette fonction se note *erf* et fait partie des fonctions spéciales:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\zeta^2}d\zeta$$

5.10 Intervalle de confiance

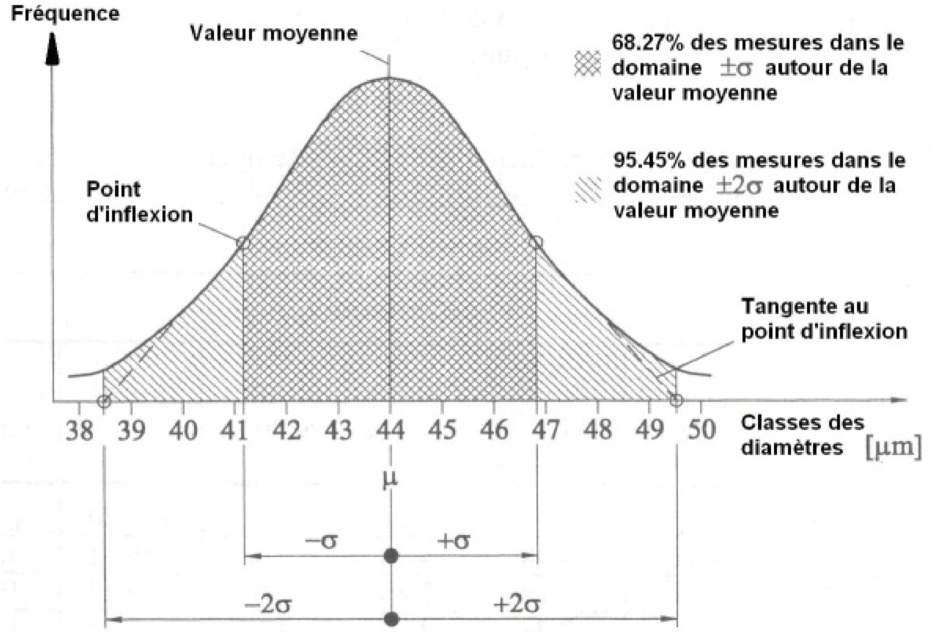
En statistiques, et en particulier dans la théorie des sondages, lorsqu'on cherche à estimer la valeur d'un paramètre, on parle d'**intervalle** ou **niveau de confiance** lorsque l'on donne un intervalle qui contient, avec un certain degré de confiance, la valeur à estimer. Le **niveau de confiance** est en principe exprimé sous la forme d'une probabilité.

Ainsi, lorsqu'on effectue un sondage (tirage au hasard d'un sous-ensemble d'une population), l'estimation d'une quantité d'intérêt donnée est soumise au hasard et correspond rarement exactement à la valeur de la quantité que l'on cherche à estimer. En présentant pour l'estimation non pas une valeur mais un encadrement, on quantifie d'une certaine manière l'incertitude sur la valeur estimée.

Plus l'intervalle de confiance est de taille petite, plus l'incertitude sur la valeur estimée est petite. L'un des objectifs de la théorie des sondages consiste à trouver des méthodes permettant de donner des intervalles de confiance de taille raisonnable.

On désigne le niveau de confiance par (1-α). Le nombre α est le **risque** que l'on prend de se tromper en affirmant que toutes les mesures sont bien dans l'intervalle proposé.

Un niveau de confiance de, par exemple, (1-α) = 95.45% signifie qu'une mesure va se trouver dans le domaine de deux écarts-type de part et d'autre de la valeur moyenne avec une probabilité de 95.45%.



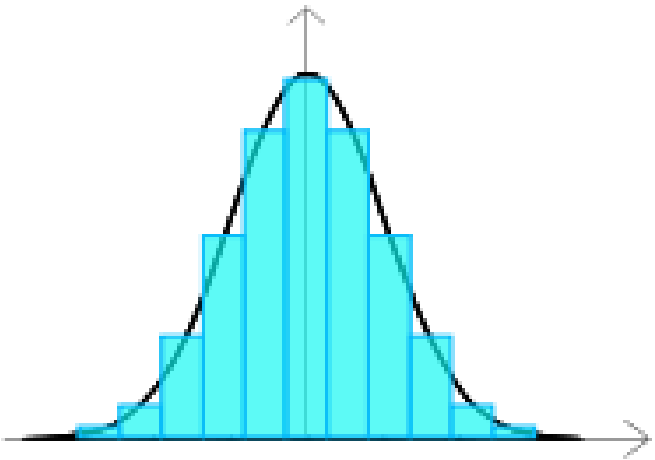
Dans le cadre de la technique de mesure industrielle, on travaille la plupart du temps avec un niveau de confiance de 95% respectivement avec le domaine de confiance ±1.96 σ.

Mais dès que des vies humaines dépendent de la fiabilité des mesures, il est recommandé de travailler au minimum avec un niveau de confiance (1-α) = 99.73% ce qui correspond à un domaine de confiance de ±3σ.

5.11 Critères de normalité

La distribution de beaucoup de paramètres industriels correspond souvent à une loi normale. En effet le recours à une distribution gaussienne est si fréquent qu'il peut finir par être abusif. Il faut alors rechercher des **critères de normalité**.

La première méthode, la plus simple, consiste à tracer l'histogramme ou le diagramme en bâtons de la distribution et à vérifier si le diagramme est en forme de « cloche ». Ce critère est subjectif, il permet cependant d'éliminer une partie des distributions jugées alors non gaussiennes.



Cette comparaison est visuelle et même si elle peut être une première approche, elle ne constitue pas un critère de «normalité».

Un premier critère consiste à utiliser les plages de normalité ou intervalles de confiance.

Si une distribution est gaussienne:

1. 68% de la population est dans l'intervalle +/- 1 sigma
2. 95% de la population est dans l'intervalle +/- 2 sigma
3. 99,7% de la population est dans l'intervalle +/- 3 sigma

Lorsque ces pourcentages ne sont pas (plus ou moins bien) respectés, il est fort à parier que la distribution ne soit pas gaussienne.

5.12 Droite de Henry

La **droite de Henry** est une méthode pour visualiser les chances qu'a une distribution d'être gaussienne. Elle permet aussi de lire rapidement la **moyenne** et **l'écart type** d'une telle distribution.

Si X est une variable gaussienne de moyenne $\overline{x}$ et écart type σ et si G est une variable de loi normale centrée réduite, on a les égalités suivantes:

$$P(X < x) = P\left(\frac{X - \overline{x}}{\sigma} < \frac{x - \overline{x}}{\sigma}\right) = P(G < t) = \Phi(t)$$

avec

$$t = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Pour chaque valeur x_i de la variable X, on peut (à l'aide d'une table de la fonction Φ, page 56):

- calculer $P(X < x_i)$
- en déduire t_i tel que $\Phi(t_i) = P(X < x_i)$

Si la variable est gaussienne, les points de coordonnées (x_i ; t_i) sont bien alignés sur la droite d'équation

$$t = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

On compare donc les valeurs des **quantiles** de la loi empirique (x_i) aux quantiles de la loi normale centrée réduite t_i.

Cette méthode peut également se généraliser à d'autres distributions en comparant là encore les quantiles théoriques aux quantiles empiriques.

5.13 Facteur d'élargissement

Si on a un grand nombre de mesures, et on peut considérer qu'on a une distribution gaussienne avec moyenne $\bar{x}$ et écart type empirique corrige σ (réf. page 43), l'**incertitude** due à la dispersion statistique est alors estimée par

$$u = k \cdot \sigma$$

k est appelé **facteur d'élargissement** et est une constante dépendant du **niveau de confiance**[5], donc de l'erreur admissible.

En physique, on prend souvent $k = 3$, ce qui correspond à un intervalle de confiance de 99,73 %, ce qui implique que 99,73 % des valeurs x_i sont comprises entre $(\bar{x} - u)$ et $(\bar{x} + u)$ et 0,27 % seront hors de cet intervalle: ainsi sur 1 000 mesures, seules trois seront en dehors de l'intervalle.

Dans de nombreux cas en **métrologie industrielle**, on se contente de prendre $k = 2$, soit un niveau de confiance de 95 % (5 mesures hors intervalle pour cent mesures).

Mais pour une entreprise ayant une production énorme, 0,27 %, et a fortiori 5 %, peuvent être encore trop. Par exemple, imaginons qu'une entreprise produise des pièces dont la longueur ℓ doit avoir une précision $\Delta\ell$ donnée; l'outil de production, après réglage, produit des pièces avec une dispersion σ sur ℓ.

- Si $\Delta\ell = 2 \cdot \sigma$, alors pour un milliard de pièces produites, 50 million iront au rebut, ce qui est énorme.
- Si $\Delta\ell = 3 \cdot \sigma$ (grâce à une optimisation de l'outil de production, l'entreprise a divisé la dispersion σ par un facteur 1,5), alors pour un milliard de pièces produites, 2,7 millions iront au rebut, ce qui est encore important.
- Si elle réussit à diminuer σ encore de moitié, on aura alors $\Delta\ell = 6 \cdot \sigma$, soit un taux de rebut de $2 \cdot 10^{-9}$ (0,0000002 %), deux pièces iront au rebut par milliard produit. Ce niveau de confiance très exigeant a donné son nom à une méthode de gestion appelée *Six Sigma*[6].

Si l'on a peu d'échantillons (typiquement ≤ 30), il faut utiliser un coefficient plus grand pour prendre en compte l'erreur faite sur la détermination de $\bar{x}$ et de σ. L'application de la **loi statistique de Student**[7] permet de calculer le facteur d'élargissement k en fonction à la fois de n et du niveau de confiance $(1-\alpha)$.

Les valeurs de k pour l'hypothèse d'une distribution normale sont données à la page suivante.

[5] Voir la section 5.10 plus haut..

[6] Voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Six_Sigma

[7] Voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Student

Nombre de mesures dans la série	**Niveau de confiance (1-α)**						
	68.27%	**90.00%**	**95.00%**	**95.45%**	**99.00%**	**99.73%**	**99.98%**
2	1.84	6.31	12.71	18.44	63.66	235.80	761.40
3	1.32	2.92	4.30	4.93	9.93	19.21	42.30
4	1.20	2.35	3.18	3.48	5.84	9.22	19.77
5	1.15	2.13	2.78	2.98	4.60	6.62	12.48
6	1.11	2.02	2.57	2.73	4.03	5.51	9.77
7	1.09	1.94	2.45	2.61	3.71	4.90	7.51
8	1.08	1.90	2.37	2.50	3.50	4.53	6.78
9	1.07	1.86	2.31	2.42	3.37	4.28	6.22
10	1.06	1.83	2.26	2.37	3.25	4.09	5.89
20	1.03	1.73	2.09	2.18	2.86	3.45	4.76
30	1.02	1.70	2.05	2.13	2.76	3.28	4.47
50	1.01	1.68	2.01	2.08	2.68	3.16	4.23
100	1.00	1.66	1.98	2.04	2.63	3.08	4.12
200	1.00	1.65	1.97	2.02	2.60	3.04	4.06
$N \to \infty$	1.00	1.65	1.96	2.00	2.58	3.00	4.00

Table 1 Tableau des facteurs d'élargissement k en fonction de N et du niveau de confiance (1-α).

5.14 Tableau numérique de la fonction de répartition de la loi normale

La table suivante donne des valeurs approchées de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite (avec écart type = 1).

On se limite à des x positifs ou nuls: en effet, si par exemple on connaît l'approximation

$$\Phi(0,5) = 0,6915$$

on en déduit

$$\Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

La table suivante donne pour tout x de 0 jusqu'à 3,9 par pas de 0,01, la valeur de $10^5\ \Phi(x)$. Ces valeurs sont arrondies à l'unité la plus proche. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de x, c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.

Par example: $\Phi(1,73) = 0,95818$.

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3,8	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3,9	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000

6 Méthode des moindres carrés

6.1 Définition

La **méthode des moindres carrés**, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure à un **modèle mathématique** censé décrire ces données.

La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure.

Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions $f(x;\theta)$ d'une ou plusieurs variables x, indexées par un ou plusieurs paramètres θ inconnus. La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions, celle qui reproduit le mieux les données expérimentales.

On parle dans ce cas d'**ajustement par la méthode des moindres carrés**. Si les paramètres θ ont un sens physique la procédure d'ajustement donne également une estimation indirecte de la valeur de ces paramètres.

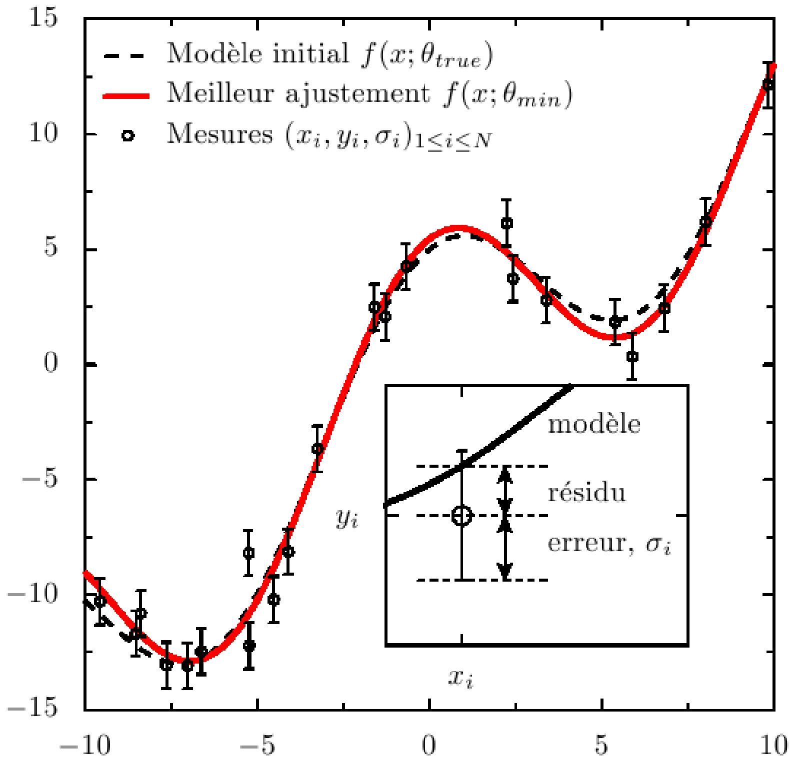


Figure 6.1 Illustration de la méthode des moindres carrés. Les données suivent la courbe figurée en pointillés et sont affectées par un bruit gaussien centré, de variance 1. Elles sont représentées graphiquement sous la forme de points de mesures, munis de barres d'erreur, représentant, par convention, ±1 écart-type autour du point de mesure. Le meilleur ajustement déterminé par la méthode des moindres carrés est représenté en rouge. Il s'agit de la fonction qui minimise la somme quadratique des écarts (appelés **résidus**) entre les données et le modèle.

La méthode consiste en une prescription (initialement empirique) qui est que la fonction $f(x;\theta)$ qui décrit « le mieux » les données est celle qui minimise la somme quadratique des déviations des mesures aux prédictions de $f(x;\theta)$.

Si par exemple, on dispose de N mesures, $(y_i)_{i=1,N}$ les paramètres θ « optimaux » au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(x_i;\theta))^2 = \sum_{i=1}^{N} r_i^2(\theta)$$

où les $r_i(\theta)$ sont les **résidus** au modèle, i.e. les écarts entre les points de mesure y_i et le modèle $f(x;\theta)$.

$S(\theta)$ peut être considéré comme une mesure de la **distance** entre les données expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données. La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale.

Si, comme c'est généralement le cas, on dispose d'une estimation de l'écart-type σ_i du bruit qui affecte chaque mesure y_i, on l'utilise pour « peser » la contribution de la mesure au χ^2.

Une mesure aura d'autant plus de poids que son incertitude sera faible:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i;\theta)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \, (y_i - f(x_i;\theta))^2$$

Les quantités w_i, inverses des variances des mesures sont appelés **poids** des mesures.

La quantité ci-dessus est appelée **khi carré** ou **khi-deux**. Son nom vient de la loi statistique qu'elle décrit, si les erreurs de mesure qui entachent les y_i sont distribuées suivant une loi normale (ce qui est très courant). Dans ce dernier cas, la méthode des moindres carrés permet de plus d'estimer quantitativement l'adéquation du modèle aux mesures, pour peu que l'on dispose d'une estimation fiable des erreurs σ_i.

Son extrême simplicité fait que cette méthode est très couramment utilisée en sciences expérimentales. Une application courante est le **lissage** des données expérimentales par une fonction empirique (fonction linéaire, polynomes ou splines). Cependant son usage le plus important est probablement la mesure de quantités physiques à partir de données expérimentales.

Dans de nombreux cas, la quantité que l'on cherche à mesurer n'est pas observable et n'apparaît qu'indirectement comme paramètre θ d'un modèle théorique $f(x, \theta)$. Dans ce dernier cas de figure, il est possible de montrer que la méthode des moindres carrés permet de construire un estimateur de θ, qui vérifie certaines conditions d'optimalité.

6.2 Régression linéaire

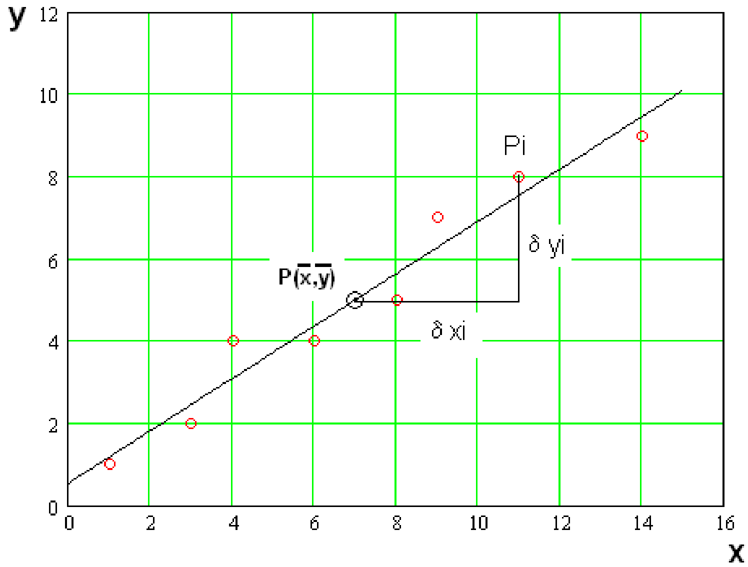
Considérons deux grandeurs x et y supposées présenter entre elles une dépendance linéaire.

Il est possible de s'assurer graphiquement de l'existence d'une telle dépendance en dessinant le graphique des points (x_i, y_i) des mesures simultanées des grandeurs x et y.

Si le nuage de points s'aligne approximativement sur une droite, il y a tout lieu de penser que la relation reliant ces deux grandeurs peut s'écrire:

$$y = ax + b$$

relation dans laquelle a et b sont des constantes à déterminer



Etant données les erreurs aléatoires apparaissant sur les mesures de x et de y, il faut tenir compte de l'ensemble des mesures pour calculer a et b.

La première condition à satisfaire dans la résolution de ce problème est de faire passer la droite par le centre de gravité du nuage de points. Alors s'il y a corrélation linéaire entre x et y, on devrait avoir:

$$\bar{y} - y_i = a \cdot (\bar{x} - x_i)$$

En faisant intervenir les erreurs apparentes:

$$\delta x_i = \bar{x} - x_i \quad \text{et} \quad \delta y_i = \bar{y} - y_i$$

on obtient:

$$\delta y_i - a \cdot \delta x_i = 0$$

En raison des erreurs aléatoires, cette dernière relation n'est généralement pas satisfaite pour tous les points de mesure. On pose alors:

$$\delta_i = \delta y_i - a \cdot \delta x_i$$

La meilleure estimation de la pente a est celle qui rend la somme des carrés des δ_i minimum:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i - a \cdot \delta x_i)^2$$

La meilleure estimation de a annule la dérivée première de la relation précédente par rapport à a, soit:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\delta y_i - a \cdot \delta x_i) \cdot (-\delta x_i) = 0$$

donc: $$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i \cdot \delta y_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i^2}$$

La meilleure estimation de *b* est obtenue à l'aide du point définissant le centre de gravité de la meilleure estimation de *a*, soit:

$$\overline{b} = \overline{y} - \overline{a} \cdot \overline{x}$$

Finalement, la meilleure droite d'ajustement d'un nuage de points, appelée **droite de régression**, est donnée par l'équation:

$$y = \overline{a} \cdot x + \overline{b}$$

On peut remarquer que la droite de régression obtenue ici est celle déterminée en **minimisant la somme des carrés des écarts sur les ordonnées**, c'est-à-dire que l'on a supposé que les erreurs aléatoires sur les mesures de *x* sont négligeables par rapport à celles intervenant sur *y*.

Dans le cas inverse, il faudrait minimiser la somme des carrés des écarts sur les abscisses.

6.3 Régressions curvilinéaires

Dans de nombreux problèmes, une relation nette apparaît entre les variables étudiées, sans que cette relation soit linéaire. Il peut alors être utile de procéder à l'ajustement d'une courbe de régression au nuage de points observés.

Deux problèmes distincts se posent alors: d'une part, le choix de l'équation de la courbe (donc le choix d'un certain type de fonction), et d'autre part, la détermination des paramètres intervenant dans cette équation.

Il existe des régressions polynomiales, exponentielles, logarithmiques, …

6.3.1 Régression polynomiale

On se propose d'ajuster un polynôme d'ordre k à un ensemble de n points de mesures donnés par les couples (x_i, y_i).

Par hypothèse, un tel polynôme est du type:

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots\dots\dots + a_k x^k = y$$

On a une équation et $(k+1)$ inconnues a_i.

Pour obtenir les k équations manquantes, on multiplie successivement la relation précédente par $x, x^2, x^3, \dots x^k$. On écrit ensuite chacune des équations obtenues pour tous les couples de mesures et on effectue la sommation des mêmes types d'équations.

On obtient alors le système suivant:

$$\left(\begin{array}{c} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dots\dots\dots\dots + a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \dots\dots\dots\dots + a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+2} + \dots\dots\dots\dots + a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k \end{array}\right)$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i^1 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^k \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^1 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^k & \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i^k \end{pmatrix}$$

soit, sous forme condensée

$$[P][Q] = [R]$$

Finalement, la solution s'obtient par:

$$[Q] = [P]^{-1} \cdot [R]$$

6.3.2 Ajustement d'un cercle par la méthode des moindres carrés.

Soit un cercle de rayon R dont l'équation est donnée par:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Cette équation peut s'écrire:

$$2ax + 2by + (R^2 - a^2 - b^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Les inconnues sont *a, b* et *R*. Il faut donc disposer de 3 équations.

En multipliant par *x* et par *y* la relation (2) on obtient:

$$2ax^2 + 2bxy + (R^2 - a^2 - b^2)x = x^3 + xy^2 \qquad (3)$$

$$2axy + 2by^2 + (R^2 - a^2 - b^2)y = x^2 y + y^3 \qquad (4)$$

On écrit les relations (2), (3) et (4) pour tous les *N* points P_i, de coordonnées x_i, y_i, puis l'on somme toutes les équations par catégorie.

On obtient:

$$2a\sum_i x_i + 2b\sum_i y_i + N(R^2 - a^2 - b^2) = \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 \qquad (5)$$

$$2a\sum_i x_i^2 + 2b\sum_i x_i y_i + (R^2 - a^2 - b^2)\sum_i x_i = \sum_i x_i^3 + \sum x_i y_i^2 \qquad (6)$$

$$2a\sum_i x_i y_i + 2b\sum_i y_i^2 + (R^2 - a^2 - b^2)\sum_i y_i = \sum_i x_i^2 y_i + \sum_i y_i^3 \qquad (7)$$

soit, sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i & \sum_i y_i & N \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 & \sum_i y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 \\ \sum_i x_i^3 + \sum_i x_i y_i^2 \\ \sum_i x_i^2 y_i + \sum_i y_i^3 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

avec:

$$c = R^2 - a^2 - b^2 \qquad (9)$$

et si on écrit l'équation (8) sous la forme:

$$[P].[Q] = [T] \qquad (10)$$

on obtient les coefficient *a, b, c* par:

$$[Q] = [P]^{-1} \cdot [T] \qquad (11)$$

7 Bilan et calcul d'incertitude

Le bilan d'incertitude est le processus conduisant à estimer l'**incertitude de mesure**.

Ce processus tient compte de l'analyse complète du processus de mesure: évidemment des grandeurs mesurées, de la prise en compte des facteurs d'influence et des corrections apportées au résultat annoncé.

Ce type de calcul peut devoir se faire dans plusieurs contextes distincts:

1. Dans le cas le plus simple on a un mesurande qui coïncide avec la seule grandeur mesurée physiquement, toutefois en général l'incertitude de la mesure sera aussi fonction d'autres variables (résolution de l'instrument, dérives, grandeurs d'influence, corrections, …).
2. Lorsqu'une valeur mesurée est utilisée dans une formule, il faut savoir estimer l'erreur induite sur la grandeur qui est le résultat de la formule, qui est de fait le vrai mesurande de l'opération. On parle ici donc de propagation des erreurs.
3. Le calcul d'incertitude permet d'évaluer les erreurs qui se produisent lors de mesures liées à la vérification d'une relation entre différentes grandeurs physiques. Il faut ici évaluer ces incertitudes pour répondre à la question: « la relation n'est pas vérifiée exactement parce qu'elle est fausse ou parce que les mesures sont incertaines ? » On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée.

7.1 Approche GUM

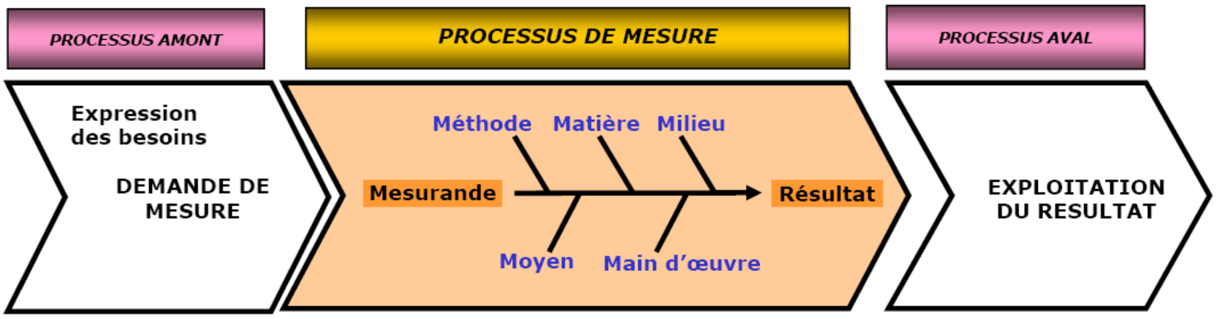
La méthode GUM (*Guide to the Expression of Uncertainly in Measurement*) est une norme ISO décrivant des procédures générale pour le bilan et le calcul d'incertitude.

Cette approche est fondée sur le fait qu'il existe toujours un modèle explicite du processus de mesure. On rappelle que ce modèle est équivalent a une expression mathématique décrivant la façon dont sont utilisés toutes les informations dont disposent l'expérimentateur (série de lectures de l'instrument, valeur d'une correction lue dans un certificat d'étalonnage, la mesure de l'estimation des effets d'une grandeur d'influence...).

La méthode GUM décrit une procédure générale pour l'estimation de l'incertitude qui devient plus ou moins complexe en fonction de la précision désirée et du nombre et type de variables influençant la mesure.

On en donne ici une approche simplifiée, néanmoins applicable à la plupart des mesures industrielles et scientifiques, qui se déroule en un certain nombre d'étapes standard.

7.2 Analyse du processus de mesure: la méthode des «5 M»



On commence par définir le processus de mesure:

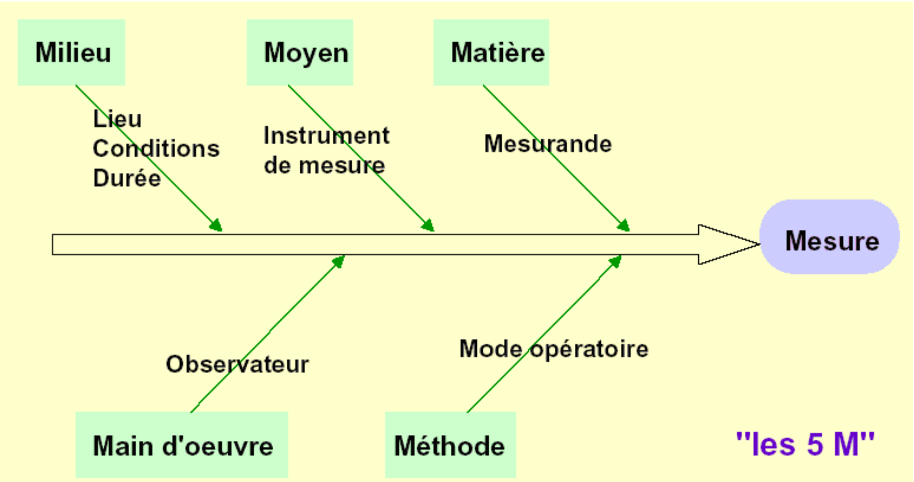
- Définir le besoin: pourquoi veut-on cette mesure ?
- Définir le mesurande: que mesure t'on ?
- Définir l'exactitude souhaitée: quelles contraintes ? (norme, budget, exactitude …)
- Définir le processus de mesure: comment procéder vu les points précédents.

On va ensuite **recenser les sources d'erreurs** de mesure affectant le mesurage du mesurande.

La diminution des erreurs est certainement la tâche la plus délicate pour toute personne réalisant des mesures ou des essais. Elle demande une étude approfondie de l'ensemble de la chaîne d'instrumentation et des phénomènes physiques directs ou indirects dont dépend le résultat de la mesure ou de l'essai.

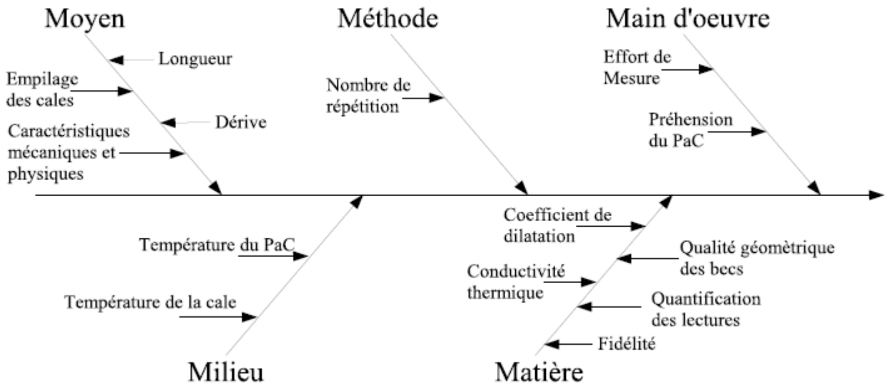
Cette étude permet à la fois d'identifier les causes d'erreurs puis de proposer des corrections qui permettront de compenser les erreurs présumées.

Une méthode particulièrement utile est celle nommée des **5 M**: Méthode, Matière, Milieu, Moyen, Main d'œuvre.



On explicite successivement, la contribution des **moyens**, de la **méthode de mesure**, l'impact du **milieu environnant** et de la **main d'œuvre** (l'expérimentateur) sans oublier l'objet mesuré lui-même: le **mesurande**.

La figure suivante illustre l'analyse de la précision d'un pied à coulisse.



Cette analyse doit conduire normalement à déterminer le type et l'amplitude des différentes erreurs du mesurage:

1. **Erreurs grossières (*e_g*)**

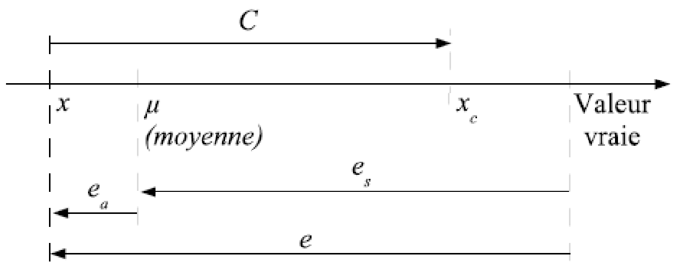
   Les erreurs grossières se produisent lors d'une procédure non-conforme lors de la prise de mesure. Par exemple en provoquant un choc contre un comparateur, en commettant une erreur de lecture ou encore une erreur de décimale. Il faut déterminer les raisons des erreurs grossières et les éliminer dans la mesure du possible. En pratique, toute erreur supérieure à 3σ, doit faire l'objet d'une analyse et éventuelle répétition, et en général sera considérée comme erreur grossière. Les valeurs mesurées affectées par des erreurs grossières **doivent être éliminées** de la série de mesures.

2. **Erreurs systématiques connues (*e_{sc}*)**

   Les erreurs systématiques d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe. Par exemple on fait une série de mesures utilisant un instrument **au moins 10 fois plus précis** et on compare les résultats avec ceux du premier instrument. Pour chaque composante *j* de l'erreur identifiée, on cherche une estimation e_{sj}.

   On appelle corrections, ces estimations changées de signe:

   $$C_j = -e_{sj}$$

   La correction totale est la somme algébrique de ces composantes:

   $$C = \Sigma_j C_j$$

   Cette loi est connue sous le nom de loi de composition des corrections.
   On obtient le résultat corrigé de la mesure en ajoutant algébriquement la correction *C* au résultat brut *x* (figure ici-bas):

   $$x_c = x + C$$

   Il faut toutefois noter que souvent les estimations e_{sj} peuvent être elles-mêmes affectées d'une incertitude, qui sera par exemple l'erreur du deuxième instrument utilisé pour leur détermination. Ces incertitudes seront traités comme des erreurs aléatoires, généralement de type B.

3. **Erreurs aléatoires (*e_a*)** dont on peut étudier la dispersion statistique (type A), ou en évaluer les effets par d'autres méthodes (type B).

7.3 Modélisation du processus

Dans le cas général on considérant la grandeur de sortie y (le mesurande) comme dépendant de plusieurs grandeurs d'entrées x_i par une fonction f, soit:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où f exprime la loi physique liant la grandeur de sortie aux grandeurs d'entrées.

Chaque grandeur d'entrée est un paramètre associé à une source d'**erreur aléatoire de type A ou B**, les mesures brutes ayant été préalablement corrigées pour les erreurs grossières et systématiques connues. Notons qu'il n'est pas strictement nécessaire de connaître mathématiquement la fonction $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans tout le domaines des grandeurs d'entrée mais uniquement autour des valeurs mesurées.

Si une des grandeurs x_i du modèle est nulle, il ne faut surtout ne pas l'éliminer car son incertitude, quant à elle, n'est pas nécessairement nulle.

7.4 Calcul des coefficients de sensibilité de *y* pour chaque x_i

Le calcul des $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sert à l'élaboration des incertitudes.

- Si on connaît l'équation liant y et x_i alors on dérive y par rapport à x_i.
- Si on ignore la forme de l'équation $y(x_i)$ alors on la vérifie expérimentalement et on en détermine la pente au point de la mesure.

7.5 Estimation des moyennes et écarts type des variables X_i

A chaque grandeur x_i du modèle mathématique du processus de mesure $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, .. x_n)$ correspond une variable aléatoire X_i dont on déterminera la **moyenne $\mu(X_i)$** et l'**incertitude type $u(X_i)$**.

Méthode de type A

Pour les variables x_i, générant des **erreurs aléatoires de type A** (réf. page 38), la méthode d'estimation statistique (réf. chapitre 5) est utilisée. Si on nomme x_{ij} les résultats d'une série de N mesures du paramètre x_i, la moyenne correspondante est

$$\mu(X_i) = \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$$

Si on veut caractériser la dispersion des valeurs x_{ij} individuelles, l'**incertitude type** de x_i est prise égale à l'écart type corrigé:

$$u(x_i) = \sigma(X_i) = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{N-1}}$$

Si on veut caractériser la dispersion des moyennes $\bar{x}_i$ d'échantillon, l'incertitude type est:

$$u(x_i) = \sigma(\bar{X}_i) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{N}}$$

Dans la pratique, l'écart-type expérimental de la moyenne est appelé **incertitude type de répétabilité**.

Méthode de type B

Pour les variables x_i, générant des **erreurs de type B** l'approche est moins structurée: on « appréciera » les moyennes et les incertitudes type en utilisant les informations techniques disponibles et des distributions (pas nécessairement gaussiennes) supposées à priori.

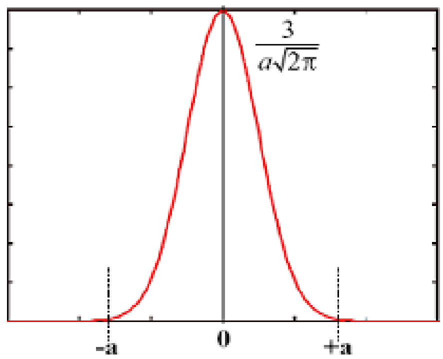
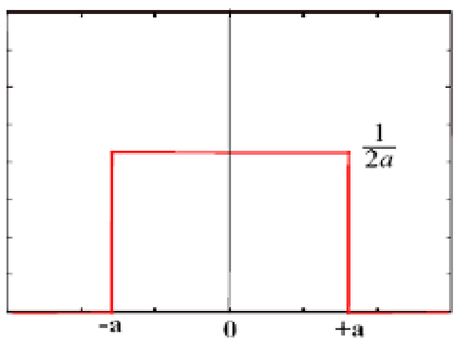
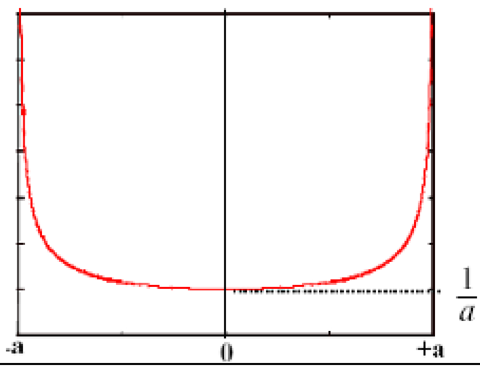
La moyenne $\mu(X_i)$ sera par exemple estimée à partir de certificat d'étalonnage, constat de vérification, valeurs trouvée dans la littérature, notice du constructeur, archives de production,…

L'incertitude-type $u(X_i)$ sera estimée à partir:

- de l'identification de la loi de probabilité associée à X_i,
- des valeurs extrêmes que peut prendre physiquement X_i.

Pour arriver à exprimer l'incertitude de type B sous forme d'un écart-type, il faut recourir à des lois de probabilité dont les plus employées sont rassemblées dans le tableau suivant. Notons qu'elles se rapportent ici à une distribution de valeurs d'une variable aléatoire de moyenne $\mu = 0$ et d'étendue

$$[\,-a;\ +a] = 2a$$

Loi	Représentation graphique	Écart-type
Normale ou gaussienne $a = 3\sigma$		$\frac{a}{3}$
Uniforme ou rectangulaire		$\frac{a}{\sqrt{3}}$
Dérivée d'arc sinus		$\frac{a}{\sqrt{2}}$

D'une manière générale, si le constructeur fournit l'incertitude-type, on l'utilise directement.

Si on a très peu d'information sur une grandeur d'entrée et que l'intervalle de variation supposé de celle-ci est de la forme

- $\Delta x = \pm a$ alors l'incertitude-type est:

  $u(x)=\frac{a}{\sqrt{3}}$

- $\Delta x = q$ (x entre 0 et q) alors l'incertitude-type est:

  $u(x)=\frac{q}{2\sqrt{3}}$

en considérant une loi uniforme sur l'intervalle de variation de la grandeur.

Un cas intéressant peut être la dérive d'un instrument de mesure. Si l'analyse des résultats des étalonnages successifs montre une tendance qui peut être modélisée, alors on applique une correction *C*. On estime l'incertitude sur cette correction par exemple grâce à une technique de régression (chap. 6). Si l'examen des résultats des étalonnages ne montre pas de tendance, on ne peut pas parler de dérive mais de défaut de reproductibilité que l'on peut évaluer par la méthode statistique de type A.

Exemples d'incertitudes de Type B

- **Résolution d'un appareil de mesure**

  La graduation d'un instrument de mesure analogique ou l'afficheur d'un appareil numérique sont des sources d'incertitude. Si la résolution du dispositif de lecture est δx, la valeur du signal d'entrée qui produit une indication donnée X peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle

  $$\left[X-\frac{\delta x}{2};X+\frac{\delta x}{2}\right],$$

  le signal d'entrée est alors décrit par une loi de probabilité rectangulaire de largeur δx et d'écart-type

  $$u_{res}(x)=\frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$$

  appelée incertitude de résolution.

- **Classe d'un instrument**

  L'Erreur Maximale Tolérée (EMT) donne les limites extrêmes de variation de l'indication obtenue d'un instrument de mesure de classe définie par l'intervalle

  $$[-a;+a].$$

  L'incertitude-type associée est alors

  $$u_{classe}(x)=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

- **Hystérésis**

  L'indication d'un instrument peut différer d'une quantité fixe selon que les lectures successives se font par valeurs croissantes ou décroissantes. La plupart du temps le sens de l'hystérésis n'est pas observable.

Si la largeur de l'étendue des lectures possibles dues à cette cause est δx, l'incertitude-type due à l'hystérésis est

$$u_{hyst}(x) = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}.$$

- **Variations de température**

  Une des principales grandeurs d'influence d'un système de mesure est la température d'environnement du moyen de mesure (local, enceinte climatisée, boîtier, ...). Dans la mesure où la température varierait entre 2 extrema de façon quasi sinusoïdale, la loi de probabilité associée à cette grandeur d'influence est la fonction dérivée d'arc sinus.

  Si les variations de la température sont telles que $\Delta T = \pm b$, alors l'incertitude-type due aux variations de température est

$$u_{temp}(T) = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

7.6 Calcul des estimateurs de la moyenne μ(Y) et l'écart type σ(Y)

On applique le modèle mathématique avec les variables aléatoire Y et $X_1 \dots X_n$:

$$Y = f(X_1, \dots, X_n)$$

Si la fonction $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, .. x_n)$ est proche de la linéarité sur un intervalle de l'ordre de 2 à 3 fois l'écart type, ce qui très généralement le cas, on peut se limiter à un développement au premier ordre. Dans ce cas l'estimateur de la moyenne μ(Y) est

$$y = f(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

et l'estimateur de l'écart-type σ(Y) est

$$u(y) \approx \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot u(x_1)\right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot u(x_n)\right]^2}$$

La valeur u(y) est appelée **incertitude-type** du mesurande y.

7.7 Facteur d’élargissement

Bien que l'incertitude-type composée $u(y)$ puisse convenir pour quantifier l'incertitude d'un résultat de mesure, il est pratiquement aussi toujours nécessaire de donner une mesure de l'incertitude qui définisse, autour du résultat de mesure, un intervalle à l'intérieur duquel on puisse trouver une fraction donnée de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande.

On peut définir un intervalle $[y - U\,;\ y + U]$ tel que la probabilité P que la valeur mesurée appartienne à cet intervalle est P = $1-\alpha$ ou α est le seuil de confiance ($0 \leq \alpha \leq 1$) et $(1-\alpha)$ le niveau de confiance. On définit ainsi un intervalle de confiance de largeur $\pm U$ autour de la valeur moyenne du mesurande.

U est appelé **incertitude élargie** et s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée $u(y)$ par un facteur d'élargissement k tel que $U = k \cdot u(y)$.

Il est généralement admis que pour un nombre de mesures $N \geq 30$ et un niveau de confiance de 95% on prend $k = 2$.

Pour $N < 30$ la valeur de k doit être majorée pour prendre en compte le manque de fiabilité dû au faible nombre de mesures. Le facteur d’élargissement est calculé selon GUM en introduisant la notion de **degrés de liberté** v par une procédure qui peut devenir assez complexe selon le type et le nombre de grandeurs d’entrée de la fonction $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

On ne donne ici que les cas les plus simples et fréquents:

- Le nombre de degrés de liberté v est égal à $(N-1)$ dans le cas de la mesure directe d'une grandeur estimée par la moyenne arithmétique de N observations indépendantes.
- Si les N observations sont utilisées pour déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b d'une droite par la méthode des moindres carrés (cas d'une droite d'étalonnage telle que $y = ax + b$, le nombre de degrés de liberté associé respectivement aux incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$ est $v = N-2$.
- Pour un ajustement par la méthode des moindres carrés de p paramètres pour N données, le nombre de degrés de liberté de l'incertitude-type de chaque paramètre est $v = N-p$.
- Si l’incertitude type est dominée par les **erreurs de tolérance**, le nombre de degrés de liberté d’une erreur de tolerance est, en principe, **infini**, ce qui donne par exemple pour un intervalle e confiance de 95%:

$$k = 2 \ \text{ pour } \ (1-\alpha) = 95\%.$$

- Plus en général on peut calculer le **nombre de degrés de liberté effectif** avec la relation de Welch-Satterthwaite:

$$v_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right]^4}{v_i}}$$

où les termes $u(y)$, $u(x_i)$ ont la même signification que dans l’expression de l’estimateur de l’incertitude type donnée à la section 7.6 plus haut, et $\boldsymbol{v_i}$ est le nombre de degrés de liberté de la composante de l’incertitude $\boldsymbol{u(x_i)}$.

Ces différents cas énumérés ci-dessus sont rassemblés dans le tableau ici-bas.

Situation de mesure	**degrés de liberté *v***
N mesures répétées	$N - 1$
N mesures répétées pour droite d'étalonnage $y = ax + b$	$N - 2$
N mesures répétées pour ajustement à *p* paramètres	$N - p$
Erreurs de tolérance	Infini
Combinaison d'erreur de plusieurs source : ex. tolérance et aléatoire	$\nu_{eff} = \dfrac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right]^4}{\nu_i}}$

Une fois le nombre de degrés de liberté ν a été calculé, le facteur d'élargissement $k_{(1-\alpha)}(\nu)$ s'obtient en fonction du niveau de confiance (1−α) désiré par le tableau suivant:

Nombre de degrés de liberté *v*	**Niveau de confiance (1−α) en %**					
	68,27	**90,00**	**95,00**	**95,45**	**99,00**	**99,73**
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,8
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,92
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	194	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,97
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,01	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,00	1,645	1,96	2	2,576	3,00

7.8 Expression finale du résultat de mesure

D'une façon générale, un résultat de mesure est constitué de 3 éléments:

- une valeur annoncée correspondant à la **valeur moyenne** du mesurande éventuellement corrigée si une erreur de justesse a été constatée,
- une **incertitude élargie** associée à un **intervalle de confiance**,
- une **unité de mesure** garantissant la traçabilité avec le Système International (S.I.) d'unités.

Le résultat de la mesure s'exprimera avec une incertitude qui sera associée au niveau de confiance demandé (souvent 95%), de la forme

$$\boldsymbol{y \pm U} \quad \textbf{[unités]} \quad \textbf{au niveau de confiance XX\%}$$

où y est la valeur (moyenne) annoncée et U est l'incertitude élargie $k \cdot u(y)$.

7.9 Arrondi de l'incertitude et du résultat final

L'incertitude élargie est habituellement donnée avec une (au maximum deux) chiffres significatifs. Le dernier chiffre significatif du résultat doit être à la même position décimale que l'incertitude.

L'arrondi des mesurandes et des incertitudes se fait en appliquant les règles usuelles d'arrondi: il n'y a pas de majoration des incertitudes. Il peut cependant être parfois approprié d'arrondir les incertitudes au chiffre supérieur plutôt qu'au chiffre le plus proche.

8 Réponse dynamiques des instruments

8.1 Mesures statiques et mesures dynamiques

Même lorsqu'il est soumis à l'action d'une grandeur à mesurer de valeur constante, un appareil de mesure n'atteint pas instantanément sa position d'équilibre. Par exemple, il faut plusieurs minutes pour que la colonne d'un thermomètre plongé dans un bain thermostatique se stabilise.

On distingue les conditions de mesure suivantes:

- les **mesures statiques**: le mesurande reste constant pendant qu'on laisse à l'appareil de mesure tout le temps nécessaire pour prendre une position d'équilibre. Lorsque cette dernière est atteinte, on peut définir le rapport S_o/E_o de la mesure (ou grandeur de sortie) au mesurande (ou grandeur d'entrée), et qui n'est autre que la **réponse statique** ou le gain statique de l'instrument.
- les **mesures dynamiques**: dans ces dernières, l'évolution de la grandeur à mesurer est trop rapide pour que l'instrument de mesure puisse suivre le détail. Le rapport $S(t)/E(t)$ s'écarte alors de la valeur statique S_o/E_o.

8.2 Cause de la dynamique des instruments

Deux facteurs principaux sont à considérer, qui agissent conjointement: les **inerties** et les **frottements.**

8.2.1 Inerties

Ce sont les inerties qui font que l'appareil de mesure tend à rester dans sa position actuelle et a besoin d'un apport d'énergie pour modifier son état; il s'oppose en quelque sorte à la mesure. Les inerties se présentent comme des réservoirs d'énergie ou de matière, qu'il faut remplir, ce qui ne peut être instantané, car le débit est limité. Suivant la nature des instruments et des grandeurs mesurées, ce peuvent être:

- les **inerties mécaniques**: la masse d'un accéléromètre, soumise à une accélération ne prend son mouvement que progressivement; de même, le cadre d'un galvanomètre, le volant d'une machine soumis à un couple constant, prennent un mouvement accéléré;
- les **inerties électriques**: le courant ne s'établit pas instantanément dans un circuit comportant soit une inductance dans laquelle il faut créer un champ, soit une capacité qu'il faut charger;
- les **inerties thermiques**: la température du réservoir d'un thermomètre ne s'élève qu'au fur et à mesure de l'apport de chaleur;
- les **inerties pneumatiques**: un réservoir, la capsule d'un manomètre par exemple, ne s'emplit que progressivement;
- les **inerties chimiques**: une réaction procède suivant une cinétique qui retarde son établissement;

8.2.2 Frottements

Ce sont les frottements qui dissipent l'énergie, véhicule de la mesure, et amortissent l'instrument. Ce sont eux qui limitent le débit d'énergie ou de matière et ralentissent l'emplissage du réservoir constitué par les inerties. Ici encore, leur nature dépend des dispositifs expérimentaux. Ce peuvent être:

- le **frottement sec** du pivot d'un cadre d'ampèremètre ou le frottement de l'axe d'un comparateur inductif;

- le **frottement visqueux**, laminaire ou turbulent, de gaz ou de liquide, qui freine le plateau d'une balance ou le déplacement de l'aiguille d'un appareil de mesure électrique, ou encore l'écoulement du fluide dans un manomètre;
- le **frottement interne des solides**, qui dissipe l'énergie liée à la déformation et joue un rôle important dans l'amortissement des vibrations;
- la **résistance électrique**, qui dissipe en chaleur l'énergie électrique. Son action se manifeste fréquemment par l'intermédiaire des courants induits ou courants de Foucault, comme c'est le cas pour le cadre d'un galvanomètre ou le disque tournant d'un compteur d'électricité.

8.3 Moyens d'étude de la réponse dynamique

La discussion qui suit s'applique au cas où le comportement dynamique d'un instrument peut être caractérisée par une équation différentielle linéaire, ce qui est très souvent le cas mais pas une généralité. Une telle équation se présente sous la forme:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + ... + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

La variable $u(t)$ correspond ici à la **grandeur à mesurer** (grandeur d'entrée), la variable $y(t)$, à la **mesure** enregistrée. Les coefficients $a_n,....a_0$ sont des constantes.

Le membre de gauche représente **l'équation caractéristique** de l'équation différentielle. Il contient des informations caractérisant la physique du système et la manière dont il répond quand il est excité. Le membre de droite représente le signal d'entrée, l'**excitation**.

Ainsi les deux membres contiennent des informations indépendantes, d'un côté la caractéristique de transfert du système, de l'autre la fonction d'excitation appliquée. Comme les deux fonctions sont des expressions linéaires, elles peuvent toutes deux être converties en fonctions de transfert par la méthode de Laplace.

Les performances du système peuvent donc être obtenues théoriquement si l'équation différentielle linéaire non-homogène peut être résolue en fournissant la valeur de la sortie en fonction du temps.

Les systèmes d'ordre 0, 1 et 2 seront seuls pris en considération dans la discussion qui suit. Les fonctions de transfert unitaires typiques de ces systèmes sont alors, avec $s = j\omega$ et τ_i des constantes de temps:

Ordre 0: $a_0 y = u(t)$ $\quad\quad$ $\frac{Y(s)}{U(s)} = 1$

Ordre 1: $a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t)$ $\quad\quad$ $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$

Ordre 2: $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t)$ $\quad\quad$ $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)}$

8.4 Instruments d'ordre zéro

Dans un système d'ordre zéro la mesure *y(t)* est en relation linéaire avec l'excitation *u(t)*.

$$a_0 y = u(t)$$

La forme d'équation différentielle donnée montre que la dérivée est zéro, signifiant que le système ne va pas altérer les caractéristiques temporelles d'une fonction dépendante du temps introduite en entrée. Ainsi, le système d'ordre zéro ne peut pas introduire de déphasage ou de modification d'amplitude en fonction de la fréquence du signal appliqué.

8.5 Instruments du premier ordre

8.5.1 Définition et exemples

Les **instrument du premier ordre** sont régis par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants:

$$\lambda \cdot \dot{y} + y(t) = u(t)$$

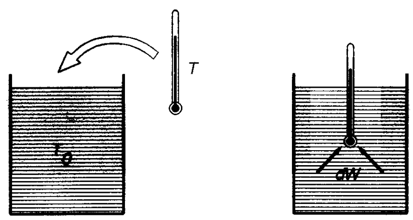
La variable $u(t)$ correspond au mesurande, la variable $y(t)$ correspond à la mesure. Il faut noter que $y(t)$ et $x(t)$ sont des grandeurs de même dimension, ce qui veut dire que si $x(t)$ est la grandeur d'entrée $E(t)$, $y(t)$ doit être identifié à $S(t) \cdot (E_0/S_0)$.

Dans ce qui suit, on présente quelques exemples d'instruments du premier ordre.

Thermomètre

Plongé au temps $t = 0$ dans un liquide à température T_0, il présente au temps t la température T. A cet instant, et dans l'intervalle de temps dt, il reçoit l'énergie:

$$dW = h \cdot (T_0 - T)\, dt \qquad (1)$$



où h est un coefficient d'échange, supposé constant.

L'énergie dW est utilisée à accroître la température du thermomètre de dT, soit:

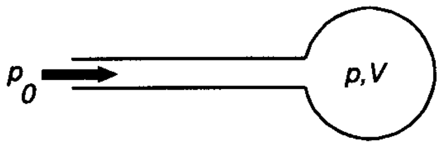
$$dT = \frac{dW}{c} \qquad (2)$$

où c est la capacité calorifique du thermomètre. En éliminant dW entre (1) et (2) on a:

$$\frac{c}{h}\frac{dT}{dt} + T = T_0$$

qui correspond bien à l'équation d'un instrument du premier ordre.

Manomètre



Un manomètre mesure la pression p_0 à travers un tube de petit diamètre. L'énergie élémentaire fournie au manomètre pendant le temps dt vaut:

$$dW = k\,(p_0 - p)\, dt \qquad (3)$$

Elle est proportionnelle à la différence de pression, ce qui est exprimé au moyen du coefficient k, supposé constant, que nous appellerons coefficient de transfert.

La variation corrélative de pression dans le volume V de la capsule manométrique est

$$dp = \frac{dW}{V} \qquad (4)$$

D'où, en éliminant dW entre (3) et (4) on obtient

$$\frac{V}{k}\frac{dp}{dt} + p = p_0$$

8.5.2 Réponse indicielle

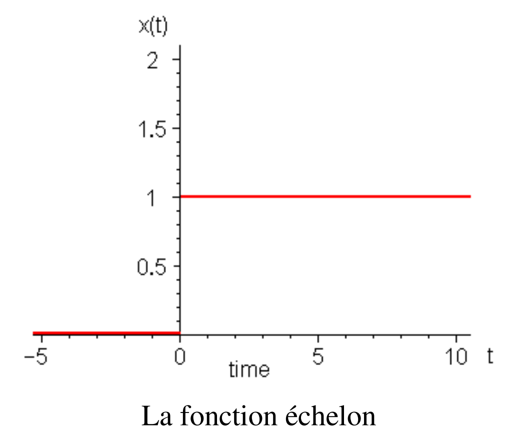
Rappelons l'équation d'un instrument du premier ordre:

$$\lambda \cdot \dot{y} + y(t) = u(t)$$

Supposons que $u(t)$ soit une fonction échelon avec amplitude E_0:

- $u(t)/E_0 = x(t) = 0$ pour $t \leq 0$,
- $u(t)/E_0 = x(t) = 1$ pour $t > 0$.

Supposons aussi que $y(t) = 0$ pour $t \leq 0$.
On veut trouver $y(t)$ pour $t > 0$.



La fonction échelon

L'équation différentielle devient: $\lambda \cdot \dot{y} + y(t) = E_0 x(t)$.

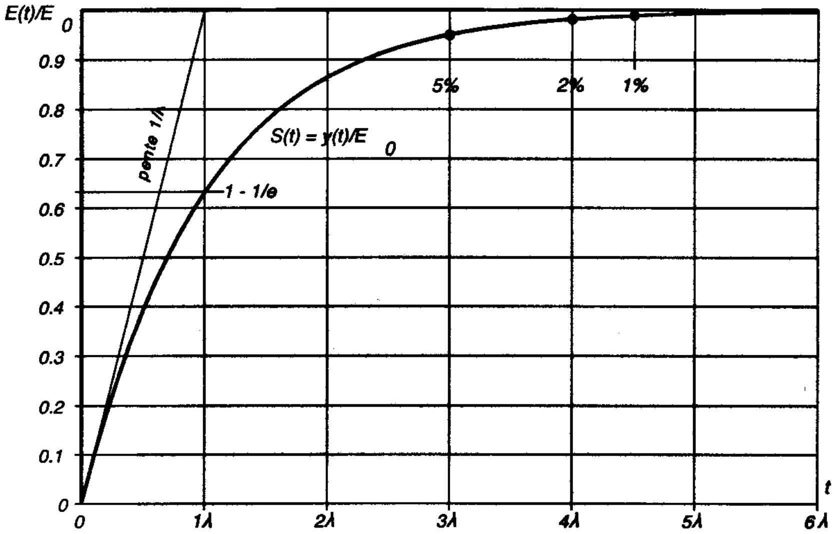
La solution de cette équation est: $y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} + B$

Les constantes A et B se déterminent par les conditions aux limites:

$y = 0$ pour $t = 0$ et $y = E_0$ pour $t \rightarrow \infty$

D'où finalement: $$y(t) = E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \qquad (5)$$

La réponse indicielle correspondante est représentée sur la figure suivante: l'échelle du temps y est décrite en termes de multiples de λ.



8.5.3 Constante de temps et temps de réponse

Dans l'équation (5), la quantité λ est homogène à un temps. Elle est appelée **constante de temps** de l'instrument dont elle caractérise la vitesse de réponse.

Il est facile de voir que λ est le temps après lequel la réponse a atteint à $1/e$ près la valeur d'équilibre[8]. Et aussi que la pente de la courbe à l'origine est $1/\lambda$.

Dans la pratique, il est important de connaître le temps nécessaire pour que la grandeur de sortie soit à $x\%$ près de la valeur d'équilibre, qui est celle de la valeur correcte du mesurande. Ce temps est qualifié de **temps de réponse à $x\%$ près**. Il est une caractéristique qui s'applique à tous les instruments, indépendamment de toute correspondance avec une équation. La figure de la réponse indicielle montre les temps de réponse à 5%, 2% respectivement 1% près.

Il ne faut pas confondre la constante de temps avec un **retard** pur. Le retard est un décalage τ dans le temps, qui fait que la grandeur de sortie à l'instant t dépend de la grandeur d'entrée à l'instant $t-\tau$.

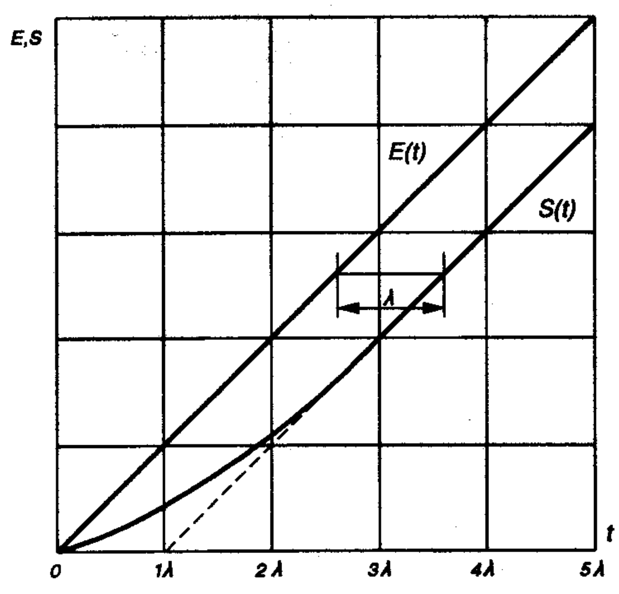
8.5.4 Réponse à un échelon de vitesse

Dans ce cas, l'équation différentielle s'écrit: $\lambda \dfrac{dy}{dt} + y = A \cdot t$

A étant la vitesse de variation de la grandeur à mesurer, grandeur supposée nulle au temps $t = 0$. Le calcul par la transformée de Laplace conduit au résultat suivant:

$$y(t) = A \cdot (t - \lambda) + A \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

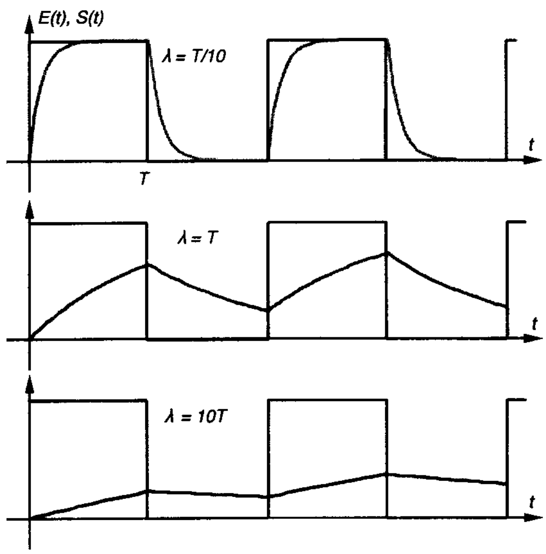
Lorsque le terme exponentiel devient négligeable (après 5λ environ), l'indication de l'instrument au temps t donne la valeur de la grandeur à mesurer au temps $(t-\lambda)$, comme montré sur la figure suivante.



[8] e est la constante de Néper, qui est la base des logarithmes naturels.

8.5.5 Réponse à un train d'impulsions

Supposons qu'on applique un signal rectangulaire, de rapport cyclique égal à 0,5 et demi-période T, à un instrument du premier ordre. Selon le rapport λ/T, constante de temps λ sur demi-période, on obtiendra les réponses représentées sur les figures suivantes.



- Dans le premier cas, λ/T petit, le signal de sortie $S(t)$ est relativement peu déformé par rapport au signal d'entrée $E(t)$. L'amplitude maximale est atteinte.
- Dans le deuxième cas, $\lambda/T = 1$, une distorsion importante apparaît, de même qu'un déphasage. L'amplitude maximale n'est plus atteinte.
- Dans le dernier cas, $\lambda/T >> 1$, l'amplitude de sortie est fortement réduite et le déphasage voisin de -90°. Le signal de sortie est pratiquement triangulaire, ce qui montre bien l'aspect intégrateur des instruments du premier ordre.

8.5.6 Réponse à une excitation harmonique

Si on applique une excitation harmonique du type:

$$x(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

et que l'on considère la réponse en régime permanent, c'est-à-dire la réponse lorsque le régime transitoire a disparu, il faut trouver la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre:

$$\lambda \frac{dy}{dt} + y = E_0 \cos(\omega \cdot t) \qquad (6)$$

Or cette solution est elle-même sinusoïdale, du type

$$y(t) = y_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

avec

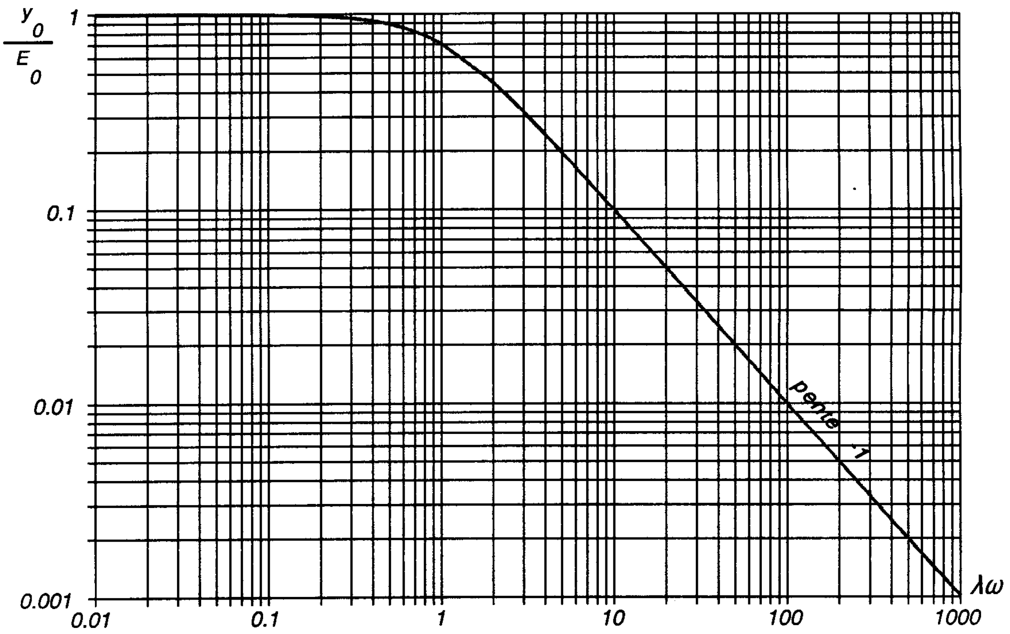
$$y_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 \cdot \omega^2}} \qquad \text{et} \qquad tg\varphi = -\lambda \cdot \omega$$

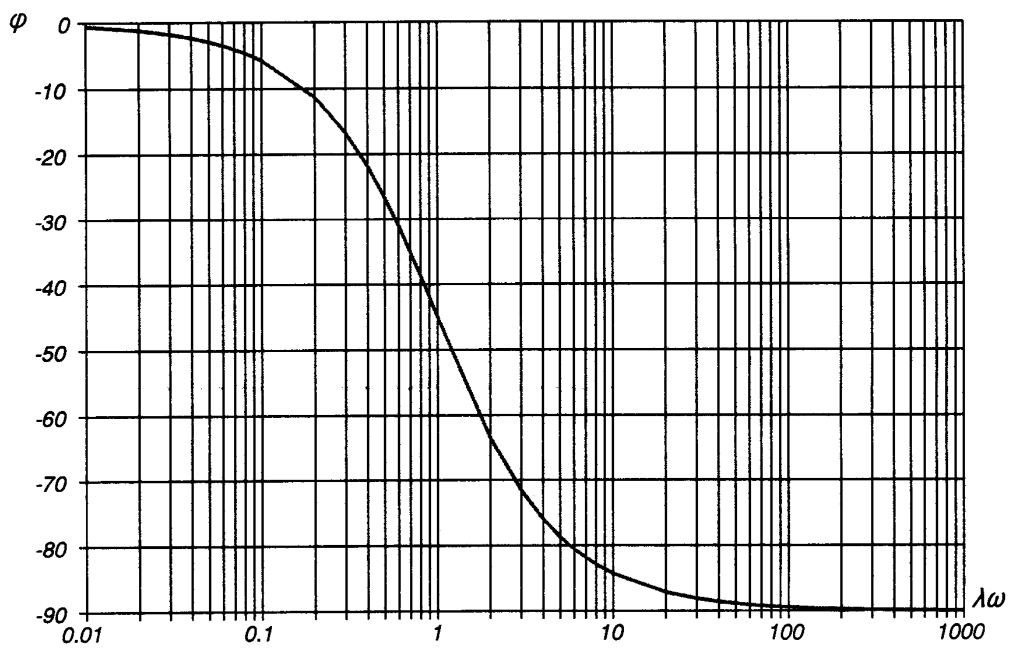
L'angle φ est le **déphasage** entre la mesure et le mesurande.

Les deux figures à la page suivante représentent le diagramme de Bode, c.à.d. les courbes de réponse en amplitude et en phase d'un instrument du premier ordre.

Il est commode de tracer la réponse en amplitude en fonction du paramètre $\lambda\omega$ et en coordonnées logarithmiques. Dans cette représentation, la réponse est assez bien figurée par deux droites, l'une horizontale d'ordonnée 1, l'autre ayant une pente -1 (pente de – 6 dB par octave). Ces deux droites se coupent en un point d'abscisse $\lambda\omega = 1$.

Pour la réponse en phase, un diagramme semi-logarithmique convient bien. Elle prend la forme symétrique par rapport au point d'abscisse $\lambda\omega = 1$ et d'ordonnée $\varphi = - 45°$.





8.5.7 Bande passante pour -3 dB

La bande passante d'un instrument ou capteur est définie conventionnellement comme la fréquence à laquelle l'instrument à un gain de **-3 dB** (~ 0.7 en amplitude relative)

La bande passante (-3dB) d'un instrument du premier ordre correspond à la fréquence:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} \qquad (rad/s)$$

$$f = \frac{1}{2\pi\lambda} \qquad (Hz)$$

et à la phase de -45°.

.

8.6 Instruments du deuxième ordre

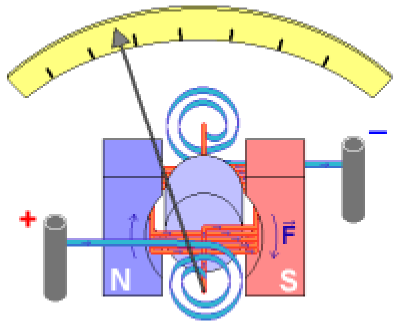
Définition et exemples

Les instruments du deuxième ordre sont régis par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, telle que:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (7)$$

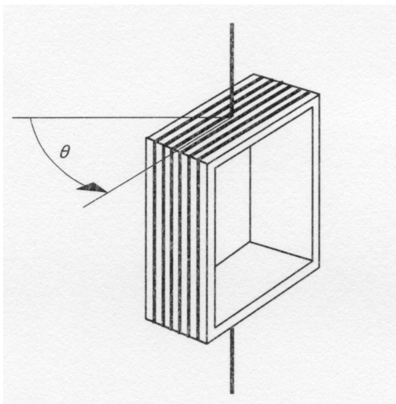
où $u(t)$ représente la grandeur à mesurer (grandeur d'entrée) et $y(t)$ la mesure de cette grandeur (grandeur de sortie).

L'exemple classique qui illustre ce type d'instrument est le **galvanomètre à cadre mobile.**



Un galvanomètre est l'un ampèremètre de type analogique. Le galvanomètre à cadre mobile, appelé aussi magnéto électrique, ou mouvement d'Arsonval, est constitué d'un cadre avec une bobine montée sur pivot, baignant dans le champ magnétique d'un aimant fixe.

Sur cette bobine est fixée l'aiguille de visualisation et un ressort chargé de rappeler l'équipage mobile dans la position indiquant le zéro. La bobine de faible impédance est branchée en série dans le circuit où circule le courant à mesurer.



Le courant, en traversant la bobine, induit dans celle-ci un champ électromagnétique, ce qui provoque un pivotement par répulsion des champs magnétiques. Plus le courant est intense, plus ce couple C qui lui est proportionnel fait tourner la bobine.

Si le cadre mobile a un moment d'inertie I et qui tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre; ce dernier est alors rappelé par un couple élastique $\Gamma\theta$.

Le mouvement est freiné par des couples de frottement visqueux ($\nu \cdot d\theta / dt$) proportionnels à la vitesse (en particulier provoqués par le courant induit).

L'application de la deuxième loi de la dynamique pour un mouvement circulaire:

$$C - \Gamma \cdot \theta - \nu \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

donne dans ce cas:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu \frac{d\theta}{dt} + \Gamma \cdot \theta = C$$

qui est bien une équation de type (7).

8.6.1 Equation réduite

L'étude de l'équation (7) conduit à définir quelques termes qui reviennent constamment dans les calculs.

Il est classique de poser:

$$\omega_0^2 = \frac{a_0}{a_2} \;;$$

- ω_0 est appelé **pulsation propre** du système et
- $\omega_0/2\pi$ étant la **fréquence propre**.

De même on introduit l'expression:

$$\zeta = \frac{a_1}{2 \cdot \omega_0 \cdot a_2} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$$

qui caractérise l'amortissement du système.

ζ est appelé **facteur réduit d'amortissement** ou encore **coefficient d'amortissement**.

Avec ces notations et en divisant l'équation (7) par a_0, l'équation différentielle prend la forme:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \qquad (8)$$

aussi appelée **l'équation réduite**.

8.6.2 Réponse indicielle

Supposons que $u(t)$ soit une fonction échelon avec amplitude E_0:

- $u(t)/E_0 = x(t) = 0$ pour $t \leq 0$,
- $u(t)/E_0 = x(t) = 1$ pour $t > 0$.

Supposons aussi que $y(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

L'équation réduite prend la forme:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = E_0 x(t)$$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle dépend du signe du discriminant

$$\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ce qui détermine trois type de solutions.

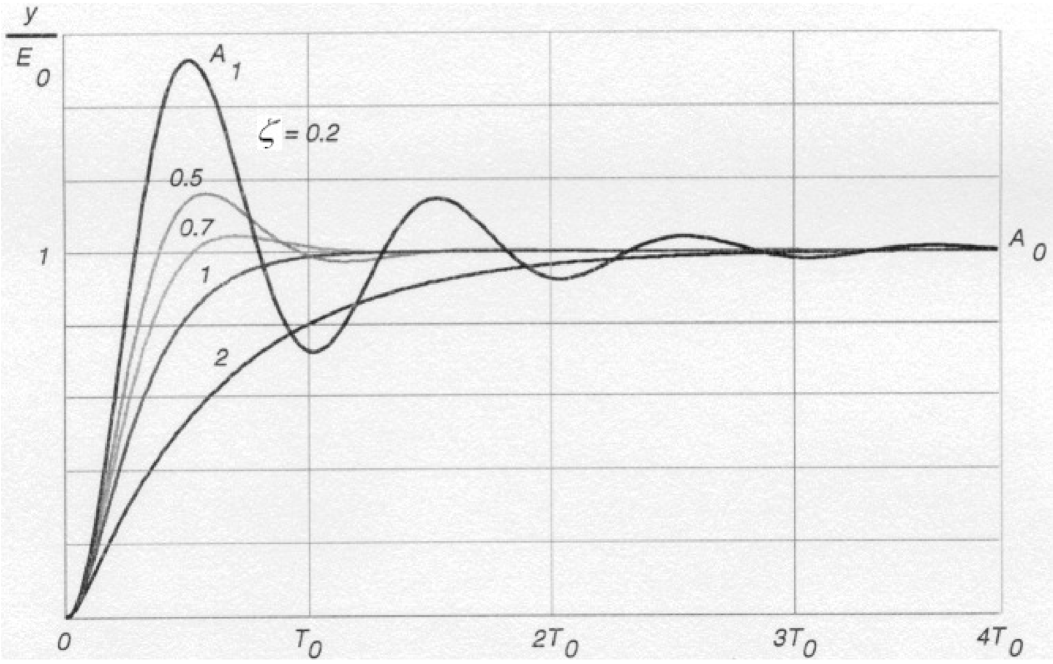
- **Régime périodique: $\zeta < 1$**

Le discriminant est négatif, il y a deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. La solution est donnée par:

$$\frac{y}{E_0} = 1 - \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \cos(\omega_t - \varphi)$$

relation dans laquelle: $\omega_t = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ et $\varphi = \arccos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)$

Les courbes $\zeta = 0.2$, 0.5 et 0.7 de la figure suivante montrent la réponse à un échelon d'un instrument à faible amortissement. L'équilibre est atteint par oscillations amorties: le régime est dit **périodique**. Les oscillations se font à la **pulsation transitoire** ω_t, légèrement différente de la pulsation propre ω_0.



La réponse présente

- plusieurs maxima et minima successifs lorsque $\zeta < 0.5$,
- seulement un maximum et un minimum pour $0.5 \leq \zeta \leq 0.7$,
- elle ne montre plus qu'un maximum appréciable pour $0.7 \leq \zeta \leq 1$.

Le coefficient d'amortissement ζ peut être déduit de la valeur du dépassement relatif du premier maximum, que l'on appelle **coefficient de lancé**, selon la relation:

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

A_1 étant l'amplitude du premier maximum, A_0 celle de l'équilibre final.

- ***Régime apériodique: $\zeta > 1$***

  Le discriminant est positif, il y a deux racines réelles négatives. La solution est donnée par l'équation suivante:

$$\frac{y}{E_0} = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot e^{-\beta_2 t} - \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \cdot e^{-\beta_1 t}$$

  relation dans laquelle: $\beta_1 = \omega_0 \cdot \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ et $\beta_1 = \omega_0 \cdot \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

  La courbe correspondante pour $\zeta = 2$ est montrée sur la figure. Elle a l'aspect classique d'une réponse exponentielle, comme celle d'un système du premier ordre, ce qui se justifie par le fait que, très rapidement, l'une des deux exponentielles (en β_2) prend le pas sur l'autre, qui devient négligeable. Le régime correspondant à $\zeta > 1$ est dit **régime apériodique**.

- ***Régime critique: $\zeta = 1$***

  Le discriminant a une racine double et la solution se présente sous la forme:

$$\frac{y}{E_0} = 1 - e^{-\omega_0 t} \cdot (1 + \omega_0 \cdot t)$$

  C'est la courbe $\zeta = 1$ de la figure à la page précédente. Elle représente la façon la plus rapide d'atteindre la valeur asymptotique sans dépassement (en anglais *overshoot*).

8.6.3 Réponse à une impulsion

L'équation réduite s'écrit:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \mathrm{I} \cdot x(t)$$

La variable I représente ici la valeur de l'impulsion d'amplitude E_0 et de durée τ, définie par:

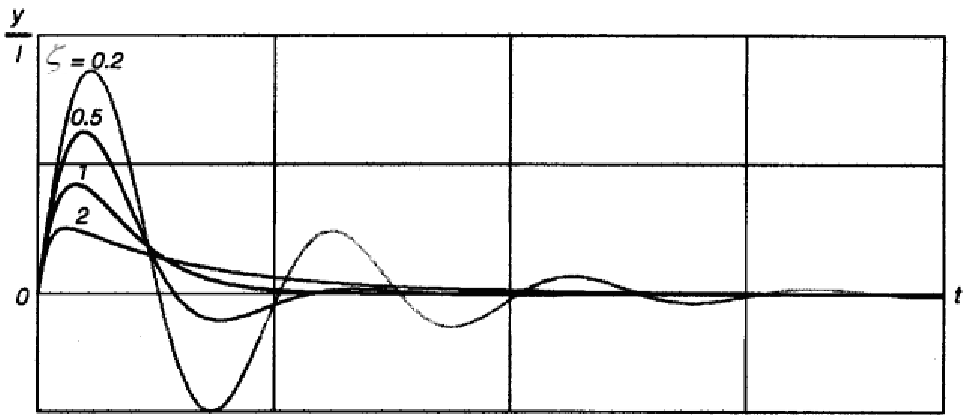
$$\mathrm{I} = E_0 \cdot \tau$$

- ***Régime périodique: $\zeta < 1$***

  La solution est donnée par:

$$\frac{y}{\mathrm{I}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_t \cdot t) \quad \text{avec} \quad \omega_t = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

  L'instrument s'écarte de l'équilibre sous l'action de l'impulsion et y revient par oscillations amorties.



- ***Régime apériodique: ζ > 1***

  La solution est donnée par:

$$\frac{y}{\mathrm{I}} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}\right)$$

  relation dans laquelle: $\beta_1 = \omega_0 \cdot \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ et $\beta_1 = \omega_0 \cdot \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

  Ecarté de sa position d'équilibre par l'impulsion, l'instrument y revient d'un mouvement amorti et il passe par une élongation maximale au temps:

$$t_1 = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)$$

- ***Régime critique: ζ = 1***

  La solution est donnée par: $\frac{y}{\mathrm{I}} = \omega_0^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_0 t}$

8.6.4 Réponse à une excitation harmonique – cas du régime permanent

L'équation réduite s'écrit:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

On sait que la solution est du type: $y = y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

D'où, en substituant:

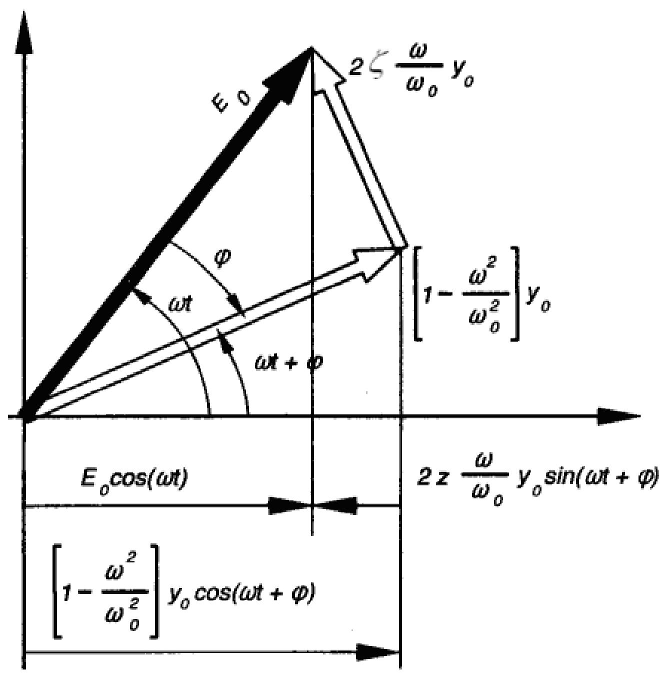
$$y_0 \cdot \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) - 2z \cdot y_0 \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

On peut établir la solution par la méthode du diagramme de Fresnel qui s'établit comme ci-contre.

De ce schéma s'obtiennent les relations donnant la réponse en amplitude et la réponse en phase.

$$\frac{y_0}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$tg\varphi = \frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$



Le rapport d'amplitude passe par un maximum pour la pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2\zeta^2}$$

Cette dernière est légèrement différente de ω_0 et ω_r. Il n'y a résonance que si $\zeta < 1/\sqrt{2}$.
Le rapport d'amplitude à la résonance est donné par:

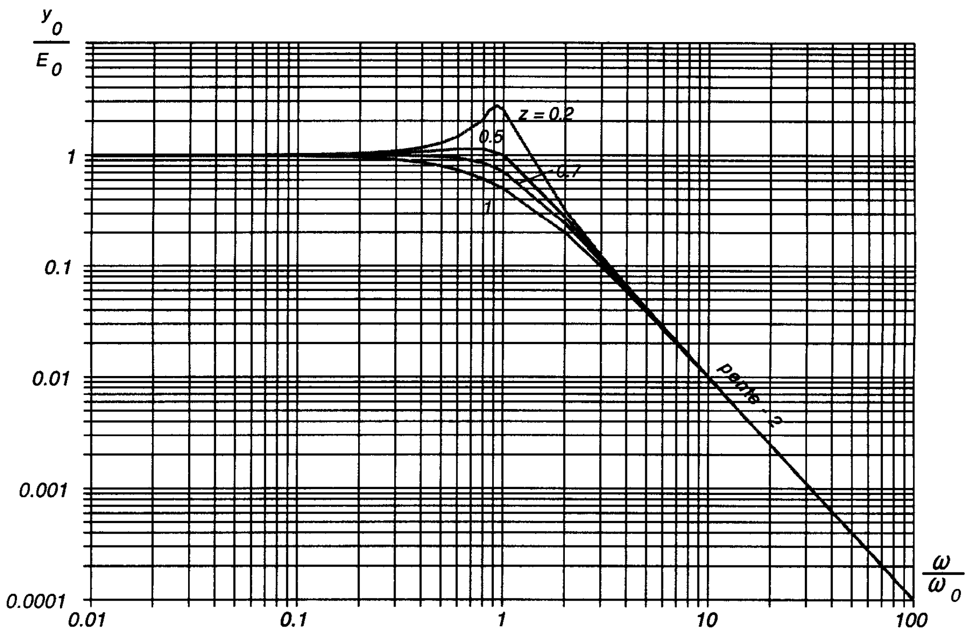
$$Q = \left(\frac{y_0}{E_0}\right)_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Il est généralement appelé **facteur de qualité** ou **facteur Q**.

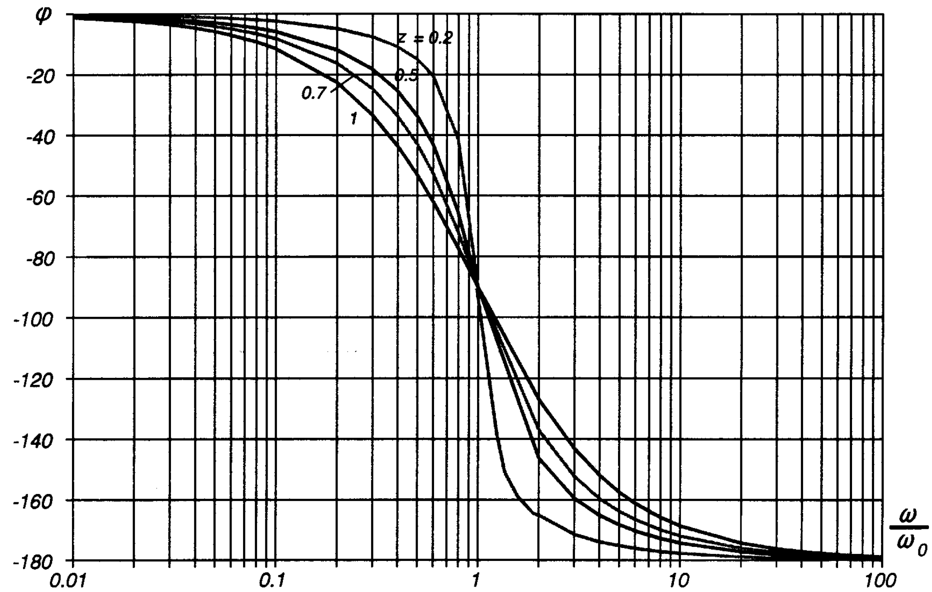
Quel que soit l'amortissement, la phase passe par $-\pi/2$ pour $\omega = \omega_0$. Elle tend vers $-\pi$ lorsque ω augmente indéfiniment. C'est le passage du déphasage par la quadrature qui caractérise la fréquence propre du système. C'est lui qui permet de déterminer ω_0 avec exactitude, même si le système est apériodique.

Les figures suivantes montrent les courbes de réponse pour différentes valeurs du facteur d'amortissement réduit ζ. Il est commode d'utiliser les représentations logarithmiques pour la réponse en amplitude et semi-logarithmique pour la réponse en phase. Ces diagrammes portent le nom de diagrammes de Bode.

La réponse en amplitude est alors assez bien figurée par deux droites, l'une horizontale, l'autre de pente -2 (pente de -12 dB/octave ou -40dB/décade). Elles se coupent à l'abscisse $\omega/\omega_0 = 1$.

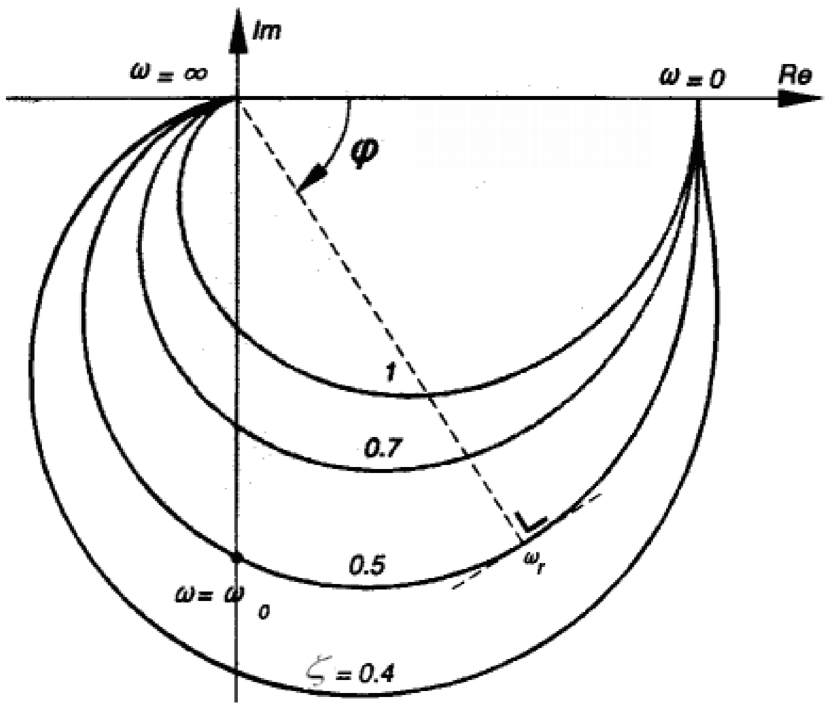


La réponse en phase prend dans ce cas une forme symétrique par rapport au point central défini par $\varphi = -\pi/2$ et $\omega/\omega_0 = 1$.



Les deux courbes de réponse en amplitude et en phase peuvent être réunies en un seul graphique, le **diagramme de Nyquist**, lieu gradué en ω/ω_0 de l'extrémité des vecteurs de module y_0/E_0 et d'argument j, lorsque ω/ω_0 varie de zéro à l'infini.

La figure ici-bas représente ce diagramme pour quatre valeurs de l'amortissement réduit ζ. La résonance s'y manifeste par l'existence d'un point où la tangente au diagramme est normale au rayon vecteur.



heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Cours de Métrologie (MTR) - Orientation MI

BASES DE MÉTROLOGIE

ANNEX A :
TERMINOLOGIE DES INCERTITUDES DE MESURE

Michel Lecollinet
26/01/2004

Edition Février 2012