

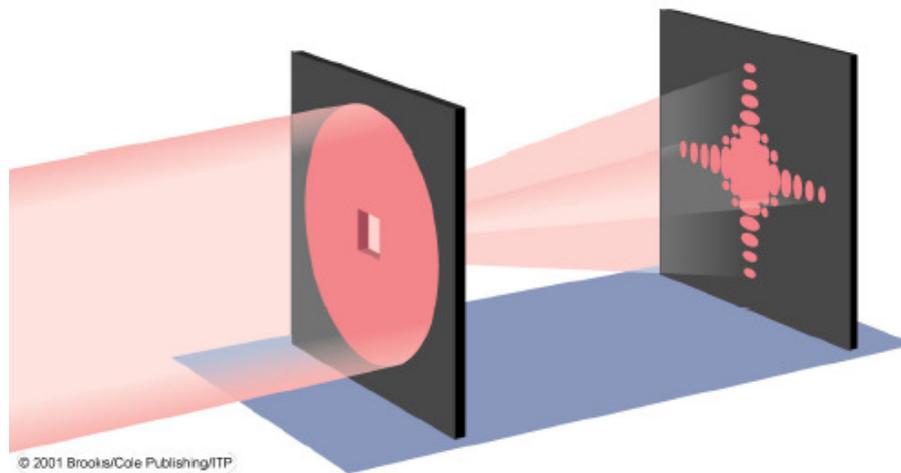
*Département des Technologies Industrielles (TIN)*

*Cours d'Optique - Orientation MI*

---

*BASES D'OPTIQUE*

---



Prof. Lorenzo Zago,  
et nombreux autres contributeurs

*Ce polycopié a été rédigé à l'usage exclusif des étudiant-e-s en ingénierie microtechnique de la HEIG-VD. Il résulte d'une compilation structurée de plusieurs sources: polycopiés préexistants à la HEIG-VD, Wikipédia et autres contributions disponibles librement sur Internet. Il n'a donc aucune prétention d'originalité.*

---

## T A B L E D E S M A T I E R E S

	<u>PAGE</u>
<b>1. INTRODUCTION À L'OPTIQUE .....</b>	<b>1-1</b>
1.1 QUELQUES ÉTAPES HISTORIQUES .....	1-1
1.2 LA PHOTONIQUE .....	1-4
1.3 L'OPTO-ÉLECTRONIQUE .....	1-4
1.4 LES THÉORIES DE L'OPTIQUE .....	1-5
<b>1.4.1 Optique géométrique .....</b>	<b>1-5</b>
<b>1.4.2 Optique ondulatoire ou optique physique .....</b>	<b>1-6</b>
<b>1.4.3 Optique quantique .....</b>	<b>1-6</b>
1.5 LE SPECTRE ÉLECTROMAGNÉTIQUE .....	1-7
1.6 INTERACTION DE LA LUMIÈRE AVEC LA MATIÈRE.....	1-9
1.7 LES MILIEUX OPTIQUES.....	1-9
1.8 LA PROPAGATION DE LA LUMIÈRE .....	1-10
<b>1.8.1 Le concept de rayon lumineux .....</b>	<b>1-10</b>
<b>1.8.2 Ombres et pénombres.....</b>	<b>1-12</b>
<b>1.8.3 Diamètre apparent d'un objet .....</b>	<b>1-12</b>
1.9 EXERCICES .....	1-12
<b>2. LA REFLEXION.....</b>	<b>2-1</b>
2.1 LOI DE LA RÉFLEXION .....	2-1
2.2 EXERCICE.....	2-1
<b>3. LA RÉFRACTION .....</b>	<b>3-1</b>
3.1 LOI DE LA RÉFRACTION .....	3-1
3.2 EXERCICE.....	3-3
3.3 INDICE DE RÉFRACTION DE QUELQUES SUBSTANCES.....	3-4
3.4 ANGLE LIMITE ET RÉFLEXION TOTALE.....	3-5
3.5 DISPERSION CHROMATIQUE ET NOMBRE DE ABBE .....	3-6
3.6 EXERCICES .....	3-7
<b>4. LAMES ET PRISMES .....</b>	<b>4-2</b>
4.1 LAME À FACES PARALLÈLES.....	4-2
4.2 LES PRISMES.....	4-3
<b>4.2.1 Géométrie.....</b>	<b>4-3</b>
<b>4.2.2 Le minimum de déviation.....</b>	<b>4-4</b>

4.2.3 Exercices.....	4-6
<b>5. FORMATION DES IMAGES .....</b>	<b>5-1</b>
5.1 OBJET ET SYSTÈME OPTIQUE .....	5-1
5.2 IMAGE ET STIGMATISME .....	5-2
5.3 CAS DU MIROIR PLAN.....	5-3
5.4 DIOPTRE PLAN .....	5-3
5.5 DIOPTRE SPHÉRIQUE.....	5-5
5.6 APPROXIMATION DE GAUSS OU PARAXIALE.....	5-5
5.7 CALCUL DE LA REFRACTION PAR UNE SURFACE SPHERIQUE:.....	5-6
5.8 FOCYERS ET DISTANCES FOCALLES OBJET ET IMAGE POUR UN DIOPTRE SPHÉRIQUE .....	5-7
5.9 EXERCICE.....	5-7
<b>6. LES LENTILLES.....</b>	<b>6-1</b>
6.1 DÉFINITIONS .....	6-1
6.2 CALCUL DES LENTILLES.....	6-2
<b>6.2.1 Procédure générale.....</b>	<b>6-2</b>
<b>6.2.2 Calcul de la position de l'image par une lentille mince .....</b>	<b>6-3</b>
6.3 FOCYERS OBJET ET IMAGE ET DISTANCE FOCALLE POUR UNE LENTILLE MINCE .....	6-4
6.4 L'ÉQUATION DE LA LENTILLE MINCE (FORMULE DE GAUSS) .....	6-4
6.5 CONVENTIONS DE SIGNE.....	6-5
6.6 LENTILLES CONVERGENTES ET DIVERGENTES.....	6-5
6.7 CONSTRUCTIONS OPTIQUES ET IMAGES RÉELLES ET VIRTUELLES.....	6-5
6.8 GRANDISSEMENT LATÉRAL .....	6-6
6.9 FORMULE DE NEWTON .....	6-7
6.10 EXERCICES .....	6-8
<b>7. ASSOCIATIONS DE LENTILLES MINCES.....</b>	<b>7-1</b>
7.1 CONSTRUCTION OPTIQUE .....	7-1
7.2 CALCUL D'UNE ASSOCIATION DE LENTILLE.....	7-3
7.3 TIRAGE FOCAL .....	7-4
7.4 LENTILLES ACCOLÉES.....	7-4
7.5 EXERCICE.....	7-5
<b>8. MIROIRS .....</b>	<b>8-1</b>
8.1 MIROIRS PLANS.....	8-1
8.2 MIROIRS SPHÉRIQUES .....	8-2
8.3 IMAGE D'UN OBJET PAR UN MIROIR CONCAVE.....	8-3
8.4 IMAGE D'UN OBJET PAR UN MIROIR CONVEXE .....	8-4
8.5 GRANDISSEMENT LATÉRAL .....	8-5
8.6 CONVENTIONS DE SIGNES POUR LES MIROIRS .....	8-6

8.7	FORMULE DE NEWTON POUR LES MIROIRS .....	8-6
8.8	LES MIROIRS PARABOLIQUES .....	8-7
8.9	EXERCICES .....	8-8
<b>9.</b>	<b>INTRODUCTION AUX ABERRATIONS DES LENTILLES .....</b>	<b>9-1</b>
9.1	ABERRATION DE SPHÉRICITÉ.....	9-1
9.2	ABERRATION DE COMA .....	9-2
9.3	ASTIGMATISME.....	9-3
9.4	DISTORSION .....	9-4
9.5	ABERRATION CHROMATIQUE .....	9-5
<b>10.</b>	<b>PHOTOMÉTRIE ET RADIOMÉTRIE .....</b>	<b>10-1</b>
10.1	TABLEAU DES UNITÉS PHOTOMÉTRIQUES .....	10-2
10.2	TABLEAU DES UNITÉS RADIOMÉTRIQUES.....	10-2
10.3	RELATION ENTRE UNITÉS PHOTOMÉTRIQUES ET RADIOMÉTRIQUES .....	10-3
10.4	INTENSITÉ LUMINEUSE .....	10-3
10.5	LE FLUX LUMINEUX .....	10-4
10.6	L'EXITANCE (OU ÉMITTANCE LUMINEUSE) .....	10-4
10.7	LA LUMINANCE.....	10-5
10.8	ECLAIREMENT.....	10-7
10.9	FLUX RÉFLÉCHI PAR UNE SURFACE .....	10-7
10.10	LOI DE BOUGUER .....	10-8
10.11	RAPPEL: ÉLÉMENT D'ANGLE SOLIDE ET COORDONNÉES SPHÉRIQUES.....	10-8
10.12	EXERCICES .....	10-9
<b>11.</b>	<b>LE MODÈLE ONDULATOIRE DE LA LUMIÈRE.....</b>	<b>11-1</b>
11.1	LA NATURE ONDULATOIRE DE LA LUMIÈRE.....	11-1
11.2	NECESSITE DE LA DESCRIPTION ONDULATOIRE .....	11-1
11.3	RAPPEL SUR LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES .....	11-3
	<b>11.3.1 Introduction.....</b>	<b>11-3</b>
	<b>11.3.2 Le vecteur de Poynting et l'éclairement.....</b>	<b>11-4</b>
11.4	EXERCICES .....	11-5
<b>12.</b>	<b>INTERFERENCE.....</b>	<b>12-1</b>
12.1	INTERFERENCE DE DEUX SOURCES LUMINEUSES .....	12-1
	<b>12.1.1 Fentes de Young .....</b>	<b>12-1</b>
	<b>12.1.2 Cas d'un écran éloigné.....</b>	<b>12-3</b>
12.2	LA NOTION DE COHERENCE .....	12-5
	<b>12.2.1 Trains d'onde.....</b>	<b>12-5</b>
	<b>12.2.2 Cohérence spatiale .....</b>	<b>12-6</b>
12.3	INTERFERENCE PAR REFLEXION SUR COUCHES MINCES .....	12-7

12.4	L'INTERFEROMETRE DE MICHELSON.....	12-8
12.5	EXERCICES .....	12-10
<b>13.</b>	<b>LA DIFFRACTION.....</b>	<b>13-1</b>
13.1	DIFFRACTION PAR UNE FENTE .....	13-1
13.2	DIFFRACTION DE FRAUNHOFER ET DE FRESNEL .....	13-3
13.3	DIFFRACTION DE FRAUNHOFER PAR UNE OUVERTURE QUELCONQUE .....	13-4
13.4	DIFFRACTION DE FRAUNHOFER AU FOYER D'UN SYSTEME OPTIQUE.....	13-5
13.5	PROFIL D'ECLAIREMENT DE LA DIFFRACTION DE FRAUNHOFER PAR UNE FENTE .....	13-6
13.6	CALCUL EXACT DU MOTIF D'INTERFERENCE PAR UNE DOUBLE FENTE.....	13-8
13.7	DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE RECTANGULAIRE.....	13-9
13.8	DIFFRACTION DUE A UNE OUVERTURE CIRCULAIRE.....	13-10
13.9	TACHE D'AIRY AU FOYER D'UN SYSTEME OPTIQUE .....	13-10
13.10	RÉSOLUTION D'UN INSTRUMENT D'OPTIQUE .....	13-11
13.11	RESEAUX DE DIFFRACTION.....	13-13
13.12	SPECTROGRAPHIE PAR RÉSEAUX DE DIFFRACTION.....	13-14
13.13	EXERCICES .....	13-15
<b>14.</b>	<b>LA POLARISATION.....</b>	<b>14-1</b>
14.1	LES POLAROÏDS.....	14-2
14.2	LOI DE MALUS .....	14-2
14.3	POLARISATION PAR RÉFLEXION .....	14-3
	<b>14.3.1 Les équations de Fresnel.....</b>	<b>14-3</b>
	<b>14.3.2 Polariseurs par réflexion et séparation de faisceau .....</b>	<b>14-5</b>
14.4	POLARISATION PAR BIRÉFRINGENCE.....	14-5
14.5	LAMES A RETARD .....	14-6
14.6	EXERCICES .....	14-9
<b>15.</b>	<b>INTRODUCTION A L'OPTIQUE DE FOURIER .....</b>	<b>15-1</b>
15.1	FREQUENCES SPATIALES .....	15-1
15.2	LA TRANSFORMEE DE FOURIER BIDIMENSIONNELLE.....	15-3
15.3	FILTRAGE SPATIAL.....	15-5
15.4	STRIOSCOPE .....	15-7
<b>16.</b>	<b>FONCTIONS DE TRANSFERT EN OPTIQUE.....</b>	<b>16-1</b>
16.1	LA FONCTION D'ÉTALEMENT DU POINT (PSF).....	16-1
16.2	LA FONCTION DE TRANSFERT DE MODULATION (MTF).....	16-2

# 1. INTRODUCTION À L'OPTIQUE

## 1.1 QUELQUES ÉTAPES HISTORIQUES

L'optique est la partie de la physique qui a pour but l'étude de la propagation de la lumière. Le mot « optique » vient du grec ancien et signifie « voir ». Qu'est-ce que la lumière ? Au cours des siècles, les philosophes, savants et physiciens qui se sont préoccupés de l'explication des phénomènes lumineux se sont répartis en deux groupes: ceux qui pensaient que la lumière était faite de corpuscules et ceux qui pensaient qu'elle était faite d'ondes.

Dans l'Antiquité, certains philosophes, comme par exemple Euclide, pensaient que la lumière était faite de corpuscules qui allaient de l'œil vers l'objet, pour le toucher, en quelque sorte. Ces corpuscules se déplaçaient à grande vitesse sur une ligne droite appelée **rayon lumineux**. Malheureusement, cette théorie est incapable d'expliquer les ombres. Il faut bien admettre que la lumière se déplace de l'objet vers l'œil. La notion de rayon lumineux, en revanche, est toujours d'actualité; elle est même à la base de l'optique dite géométrique.

Il fallu faire ensuite la distinction entre sources primaires et sources secondaires. Les **sources primaires** émettent réellement de la lumière, tandis que les sources secondaires la diffusent ou la réfléchissent. On constate en effet que les objets réfléchissent plus ou moins bien la lumière selon leur état de surface. Les lois de la réflexion de la lumière étaient déjà connues d'Archimède. En 212 av. J.-C., lors du siège de Syracuse par la flotte romaine, on rapporte qu'il fit construire un grand miroir parabolique pour concentrer la lumière du soleil sur les navires ennemis et ainsi tenter de les incendier.

La propagation de la lumière à l'intérieur des corps transparents garda plus longtemps son mystère. En passant d'un milieu à un autre, la lumière change de direction: la loi de la **réfraction** fut découverte en 1621 par Snell aux Pays-Bas, mais il ne publia pas ses résultats. En 1637, Descartes, en France, la retrouva indépendamment. En 1657, Fermat montra que cette loi était la conséquence d'un principe de minimum: la lumière se déplace selon le trajet de plus courte durée.

Les progrès de l'optique rejaillissent sur les autres sciences, notamment l'astronomie. Inventée aux Pays-Bas, mais perfectionnée par Galilée, la **lunette astronomique** lui permet en 1610, d'observer pour la première fois quatre satellites de Jupiter.

Le **microscope** est inventé à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle par le hollandais Janssen et sera constamment amélioré au cours des siècles suivants. Cet instrument permit l'observation des cellules, des globules du sang, des bactéries et fit progresser la biologie et la médecine de façon considérable.

En 1666, Newton montre, à l'aide d'un prisme, que la lumière blanche se décompose en couleurs différentes allant du rouge au violet. Cette décomposition est aussi à l'origine du phénomène de l'arc-en-ciel. Newton défend l'idée de la nature corpusculaire de la lumière, car, en l'absence d'action extérieure, elle se déplace en ligne droite, mais les travaux de Huygens, Young, Fresnel sur la **diffraction** semblent contredire cette hypothèse et accèdent la nature ondulatoire de la lumière.

Comme on ne pouvait pas concevoir que les vibrations lumineuses puissent se propager sans support matériel, on inventa le concept d'éther. La lumière s'y propage, tout comme les ondes sonores se propagent dans l'air, dans les liquides ou les solides.

## La vitesse de la lumière

En 1676, un astronome danois, Römer trouva des écarts inattendus en compilant sur plusieurs mois les données concernant les éclipses des satellites de Jupiter. Plutôt que de remettre en cause la régularité des phénomènes observés, il conclut que la vitesse de la lumière devait être finie. Les écarts s'expliquaient par les différences des temps de propagation de la lumière selon les positions relatives de la Terre et de Jupiter au cours de l'année. La valeur qu'il obtint pour la vitesse de la lumière était environ 30% plus faible que celle admise aujourd'hui. En 1849, Fizeau fut le premier à mesurer la vitesse de la lumière en laboratoire grâce à la méthode de la roue dentée.

Au XIX<sup>e</sup> siècle, la théorie ondulatoire est à son apogée grâce à Maxwell. Après avoir unifié la théorie de l'électricité et celle du magnétisme, il prédit l'existence d'ondes électromagnétiques pouvant se propager dans le vide et dont la vitesse est la même que celle de la lumière, aux erreurs de mesure près. Il conclut que **la lumière était un cas particulier d'onde électromagnétique**.

Le produit de la longueur d'onde  $\lambda$  par la fréquence  $\nu$  est égal à la vitesse de la lumière dans le vide.

$$\lambda\nu = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (1.1)$$

En 1983, une commission internationale a fixé la valeur numérique de  $c$  à 299'792'458 m/s.

## Les photons

Tous les corps émettent des radiations électromagnétiques dont le spectre dépend de leur température. Par exemple une lampe à incandescence donne d'abord une lumière rougeâtre, puis blanche au fur et à mesure que la température du filament augmente. La théorie classique du rayonnement ne pouvait rendre compte de l'allure du spectre aux fréquences élevées.

En 1900, Planck émet l'hypothèse que les corps chauds échangent de l'énergie avec leur environnement sous forme de quantités discrètes: c'est l'hypothèse des quantas. L'énergie d'un quanta est donnée par:

$$E = h\nu \quad [\text{J}] \quad (1.2)$$

où  $\nu$  est la fréquence et  $h$  la constante de Planck =  $6,62607 \cdot 10^{-34}$  J·s.

En 1905, Einstein explique l'effet photoélectrique grâce à l'absorption de quantas de lumière et l'émission de «photoélectrons». Une fois vaincu le scepticisme de la communauté scientifique de l'époque, la théorie corpusculaire de la lumière revient à nouveau à l'honneur. Ces «grains» de lumière seront appelés ultérieurement **photons**.

La vitesse de la lumière joue un rôle tout à fait particulier en physique. La vitesse de la lumière ne dépend ni de la vitesse de la source ni de celle de l'observateur. Ce fait expérimental est à la base de la **théorie de la relativité**, qui reformule en quelque sorte la dynamique newtonienne pour en tenir compte. L'une de ses prédictions est que la vitesse de la lumière joue le rôle de vitesse limite pour les objets matériels. Quelle que soit l'énergie cinétique communiquée à un corps matériel, celui-ci ne peut jamais dépasser la vitesse de la lumière.

En 1924, Louis de Broglie réconcilie les points de vue ondulatoire et corpusculaire en montrant que les objets matériels peuvent aussi être considérés comme des superpositions d'ondes de matière. L'année suivante, Schrödinger formula sa célèbre équation qui permit d'expliquer la structure atomique, et notamment de calculer les fréquences des raies spectrales caractéristiques de chaque atome. Les énergies des photons émis sont simplement égales aux différences d'énergie entre deux états de l'atome, c'est-à-dire entre deux arrangements possibles des électrons autour du noyau.

L'émission spontanée de photons par les atomes n'est pas le seul mécanisme possible. Einstein posa en 1917 les bases théoriques de l'émission stimulée de radiations électromagnétiques. Le premier **LASER** (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) fut construit en 1960 en utilisant un cristal de rubis dans un résonateur optique. Un pas technologique important de l'**optoélectronique** fut franchi en 1970 avec la diode laser continue fonctionnant à température ambiante. Actuellement ce dispositif se trouve dans tout CD ou DVD.

Parallèlement, le laser relança l'intérêt pour les **fibres optiques**, ce qui eu un impact énorme sur les télécommunications. A partir de 1970, plusieurs types de fibres se sont succédé avec des performances toujours meilleures (atténuation, dispersion). Actuellement on arrive à des débits de transmission de 40 Gbits/s sur de très longues distances (> 1200 km)<sup>1</sup>.

Les détecteurs d'images numériques, CCD apparus vers 1980, plus récemment CMOS, ont rendu possible les immenses progrès du traitement d'images par ordinateur.

Signalons enfin les avancées récentes de l'astronomie, la découverte d'exoplanètes par exemple, grâce à des télescopes de diamètre toujours plus grands. Pour s'affranchir des perturbations atmosphériques, on peut soit placer un télescope en orbite (Hubble, 1990), soit corriger les fluctuations à l'aide d'une optique adaptative. Les perturbations sont corrigées en temps réel par des dizaines, voir des centaines de miroirs déformables. Actuellement des engins gigantesques, de 30 à 50 m de diamètre sont en projet:

- E-ELT, projet européen avec miroir collecteur de 42 m de diamètre.
- TMT, instrument américano-canadien, prévu pour travailler dans le visible et l'infrarouge. Il sera constitué de 738 miroirs hexagonaux. Probablement opérationnel en 2016.
- GMT, projet d'universités américaines et australiennes. Ce télescope comportera 7 miroirs de 8,4 m de diamètre.

En conclusion l'optique occupe une place prépondérante dans l'histoire des sciences, car elle permis des progrès technologiques décisifs dans une foule de domaines comme l'astronomie, la biologie et la médecine.

Sur un plan philosophique, au cours de l'Histoire, l'optique a transformé plusieurs fois notre manière de nous représenter le monde. Selon toute probabilité, ce n'est pas fini ...

---

<sup>1</sup> Evolution récentes des fibres optiques monomodes, Nexans Suisse SA, 2005.

## 1.2 LA PHOTONIQUE

La photonique est généralement associée à l'étude de composants permettant la génération, la transmission, le traitement (modulation, amplification) ou la conversion de signaux optiques. Le photodétecteur se trouve à la frontière entre la photonique et l'électronique et appartient au domaine de l'optoélectronique, comme les lasers à semiconducteur. La photonique est également largement associée à l'optique intégrée.

Le terme photonique est également un adjectif qui se rapporte à la lumière et au photon. On parle par exemple de "cristal photonique".

Le terme photonique est aussi utilisé dans des mots composés désignant de nouvelles sciences ou technologies utilisant la lumière: nanophotonique, biophotonique.

Le terme photonique est de création récente et ses contours sont encore mal définis. Il est formé sur le même modèle que le terme électronique,  $\phi\tau\omicron\nu$  (foton) étant "lumière" en grec ancien.

Les composants étudiés dans le cadre de la photonique sont notamment les lasers, les DELs, les fibres optiques, les modulateurs optiques, les amplificateurs optiques.

## 1.3 L'OPTO-ÉLECTRONIQUE

L'opto-électronique est à la fois une branche de l'électronique et de la photonique. Elle concerne l'étude des composants électroniques qui émettent ou interagissent avec la lumière. Elle peut concerner également la conception de composant optique, tel que les guides optiques, grâce à la microélectronique, on parle alors généralement d'optique intégrée.

Les composants opto-électroniques sont des transducteurs électronique vers optique, optique vers électrique, ou bien des composants qui utilisent de tels dispositifs pour fonctionner.

L'opto-électronique est à la base des télécommunications par fibre optique.

Quelques composants opto-électroniques:

- photodiode,
- photomultiplicateur,
- photorésistance,
- phototransistor,
- cellule photoélectrique,
- diode laser,
- diode électroluminescente (DEL),
- commutateur optique,
- opto-coupleur, ...

## 1.4 LES THÉORIES DE L'OPTIQUE

Historiquement, l'optique, apparue dès l'Antiquité, a d'abord été géométrique.

L'**optique géométrique** propose une analyse de la propagation de la lumière basée sur des principes simples: la propagation rectiligne et le retour inverse. Elle a pu expliquer les phénomènes de la réflexion et de la réfraction. Elle s'est perfectionnée jusqu'au XVIIIe siècle, où la découverte de nouveaux phénomènes, tels que la déformation de la lumière au voisinage d'obstacles ou le dédoublement de la lumière lors de la traversée de certains cristaux, a conduit au XIXe siècle au développement de l'optique physique ou ondulatoire.

L'**optique ondulatoire** considère la lumière comme une onde; elle prend en compte les phénomènes d'interférence, de diffraction et de polarisation.

L'**optique quantique** a réconcilié le dualisme onde-particule. Au début du XXe siècle les théories d'Einstein sur la nature corpusculaire de la lumière donneront naissance au photon et à l'optique quantique. Les physiciens sont alors contraints d'admettre que la lumière présente à la fois les propriétés d'une onde et d'un corpuscule. À partir de là, Louis de Broglie considère, au travers de la mécanique ondulatoire, que si le photon peut se comporter comme un corpuscule, alors, à l'inverse, les corpuscules tels que les électrons ou les protons peuvent se comporter comme des ondes.

L'**électrodynamique quantique relativiste** (*QED* en anglais) est une théorie physique ayant pour but de concilier l'électromagnétisme avec la mécanique quantique en utilisant un formalisme Lagrangien relativiste. Selon cette théorie, les charges électriques interagissent par échange de photons.

### 1.4.1 Optique géométrique

L'optique géométrique s'est développée sur la base d'observations simples et repose sur deux principes et des lois empiriques:

- la propagation rectiligne dans un milieu homogène et isotrope;
- le principe du retour inverse qui exprime la réciprocité du trajet lumineux entre source et destination;
- les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

La résolution des problèmes se fait à l'aide de constructions géométriques (tracés de droites matérialisant les rayons, calculs d'angles), d'où le nom d'optique géométrique. Elle donne de bons résultats tant que l'on ne cherche pas à modéliser des phénomènes liés à la polarisation ou aux interférences et qu'aucune dimension du système n'est comparable ou inférieure à la longueur d'onde de la lumière utilisée.

L'optique géométrique permet de retrouver la quasi-totalité des résultats concernant les miroirs, les dioptries et les lentilles ou leurs combinaisons en doublet et systèmes optiques constituant notamment les instruments d'optique.

De plus, dans le cadre de l'approximation de Gauss (voir sections 5.6 et 6.2.1), l'optique géométrique donne des relations mathématiques linéaires permettant l'usage d'outils mathématiques tels que les matrices et la systématisation des calculs par ordinateur.

### 1.4.2 Optique ondulatoire ou optique physique

Alors que l'optique géométrique est une optique purement phénoménologique et ne fait pas d'hypothèse sur la nature de la lumière, hormis éventuellement qu'elle transporte de l'énergie, l'optique ondulatoire (parfois appelée "optique physique") modélise la lumière par une onde.

Le modèle de l'onde scalaire (principe de Huygens-Fresnel) permet d'interpréter les phénomènes de diffraction (lors du passage par un trou, une fente étroite, près d'un bord...) et d'interférences. Les calculs reposent alors sur la somme des amplitudes d'ondes sinusoïdales qui se superposent, somme qui, suivant le déphasage, peut conduire à un résultat nul. La superposition de deux faisceaux peut ainsi donner l'obscurité. C'est ce qu'on observe au niveau des zones sombres des figures d'interférence ou de diffraction.

Il faut ensuite considérer qu'il s'agit d'une onde transversale, si l'on veut interpréter les phénomènes de polarisation. Enfin, Maxwell permettra de comprendre que les ondes lumineuses ne sont que des ondes électromagnétiques caractérisées par un domaine de longueurs d'ondes qui les rend visibles pour l'homme.

### 1.4.3 Optique quantique

Les problèmes liés au rayonnement du corps noir et à l'effet photoélectrique ont amené à considérer que la lumière était composée de paquets d'énergie (*licht quanta*, en allemand, d'après Einstein).

Plus tard, l'effet Compton<sup>2</sup> a conduit à considérer la lumière comme constituée de particules à part entière: les photons.

Ceux-ci sont caractérisés par une masse nulle, une vitesse égale à  $c$  (célérité de la lumière), une énergie  $E = h\nu$ , où  $\nu$  est la fréquence de l'onde électromagnétique associée, et une quantité de mouvement  $p = h k/2\pi$  où  $h$  désigne la constante de Planck et  $k$  le vecteur d'onde.

La théorie quantique de l'optique ou optique quantique a été créée pour concilier les deux aspects apparemment incompatibles de la lumière, l'aspect ondulatoire (phénomènes d'interférence, de diffraction ...) et l'aspect corpusculaire (effet photoélectrique, émission spontanée ...). L'optique quantique est essentiellement une reformulation de l'optique ondulatoire dans laquelle le champ électromagnétique est quantifié par paliers.

Avec l'optique quantique on abandonne toute certitude, on raisonne uniquement en termes de probabilités:

- probabilité qu'un photon soit émis ou absorbé par un atome;
- probabilité qu'un photon émis par un atome ait une énergie donnée;
- probabilité qu'un photon se désintègre.

---

<sup>2</sup> La diffusion Compton est la diffusion d'un photon sur une particule de matière, comme un électron. On appelle effet Compton plus spécifiquement l'augmentation de la longueur d'onde du photon par la diffusion. Ce dernier phénomène a été observé la première fois par Arthur Compton en 1923. L'expérience de Compton devint l'ultime observation qui convainquit tous les physiciens que la lumière peut se comporter comme un faisceau de particules dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence (ou inversement à la longueur d'onde). Cet effet est important en physique car il a démontré que la lumière ne peut pas être uniquement décrite comme une onde, ni comme une particule.

## 1.5 LE SPECTRE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

La lumière fait partie des ondes électromagnétiques. Une onde électromagnétique peut être représentée comme la superposition d'un champ électrique  $E$  et d'un champ magnétique  $B$ . Comme toutes les ondes électromagnétiques dans le vide, ou dans des diélectriques,  $E$  et  $B$  sont:

- perpendiculaires à la direction de propagation;  $E, B \perp k$ :  $k$  est le vecteur d'onde, il symbolise la direction de propagation de l'onde;
- perpendiculaires entre eux;  $E \perp B$ ;
- en phase (nœuds et ventres de vibration se trouvent au même endroit);
- se déplacent **dans le vide** à la vitesse de **299'792'458 m/s**.

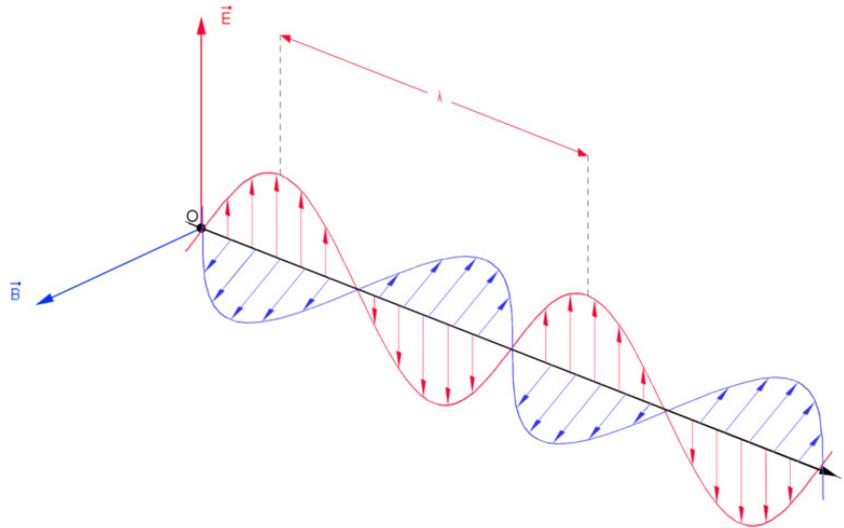
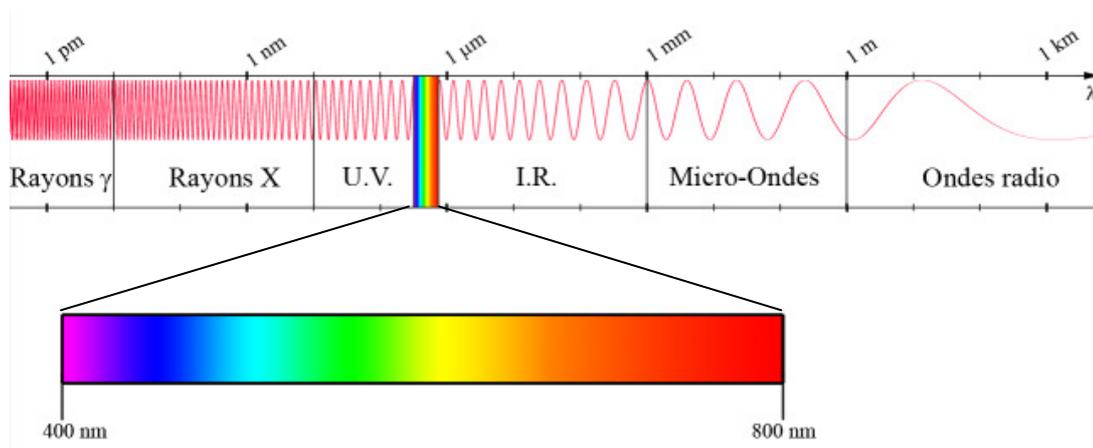


Schéma d'une onde électromagnétique

Il en existe de toutes sortes: les ondes radios, les micro-ondes, les rayons X sont toutes des ondes électromagnétiques, mais la lumière ( $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$  avec  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ) est la seule onde à laquelle l'œil humain est sensible. Une telle onde est caractérisée par sa longueur d'onde  $\lambda$ , ou par sa fréquence  $\nu$ , toutes deux liées par la relation  $\lambda = c/\nu$  avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Cette onde n'a pas besoin d'un support pour se propager.

Le schéma ci-dessous décrit la répartition des ondes électromagnétiques en fonction de la longueur d'onde. On remarquera que la lumière visible ne couvre qu'une petite plage du spectre des ondes électromagnétiques.



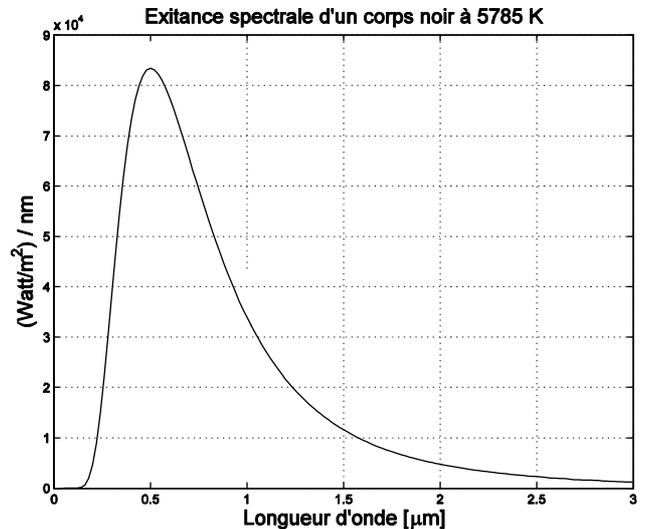
Le spectre électromagnétique et sa portion visible.

Le spectre visible correspond à la portion du spectre électromagnétique à laquelle l'œil humain est sensible. Sur l'échelle des longueurs d'onde, il s'étend de 400 à 750 nm environ. On distingue habituellement 6 couleurs<sup>3</sup>: rouge, orange, vert, jaune, bleu, et violet.

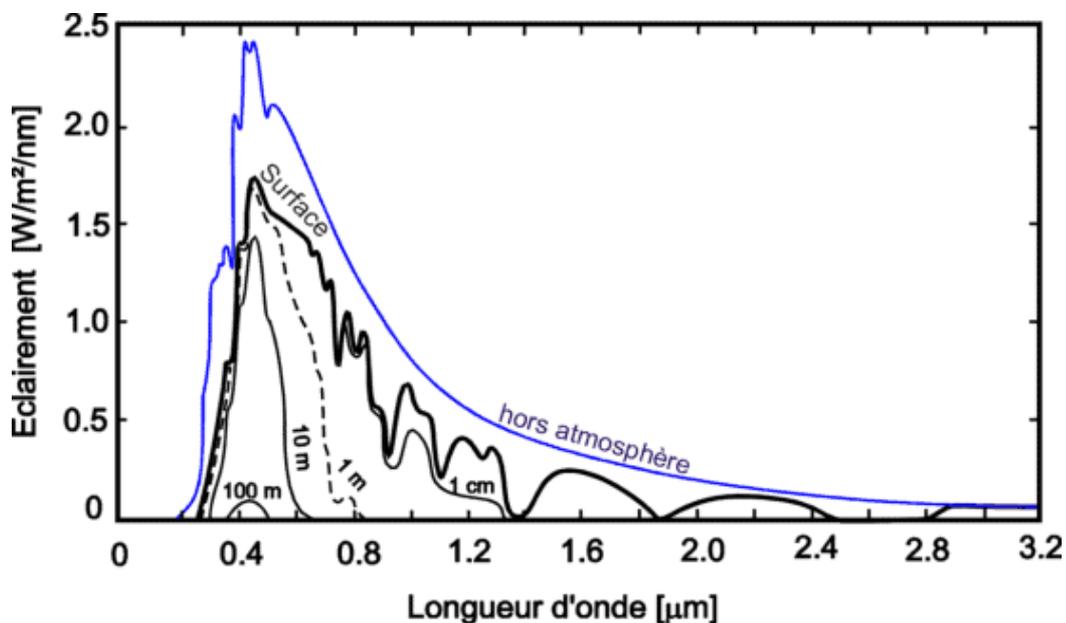
Les **couleurs primaires** sont rouge, vert, bleu; les **couleurs secondaires**: orange, jaune, violet.

La sensibilité de l'œil humain est maximale vers 550 nm (jaune-vert), ce qui est proche du maximum du spectre solaire, représenté sur la figure ci contre (le Soleil est assimilé à un corps noir chauffé à 5785 K).

Exitance spectrale = Puissance rayonnée par m<sup>2</sup> et par nm de longueur d'onde.



La figure ci-dessous montre l'éclairement mesuré au niveau de la mer et à différentes profondeurs: 1 cm, 1 m, 10 m et 100 m. On remarque que le spectre visible correspond à la lumière qui pénètre à quelques mètres sous la surface de l'eau.



Pour une onde monochromatique on a:

$$\lambda = \frac{c}{N} \quad (1.1)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu (transparent) et  $N$  est la fréquence de l'onde.

<sup>3</sup> L'indigo est aujourd'hui « abandonné ». Il avait été introduit par Newton pour avoir 7 couleurs, chiffre jugé plus sacré que 6.

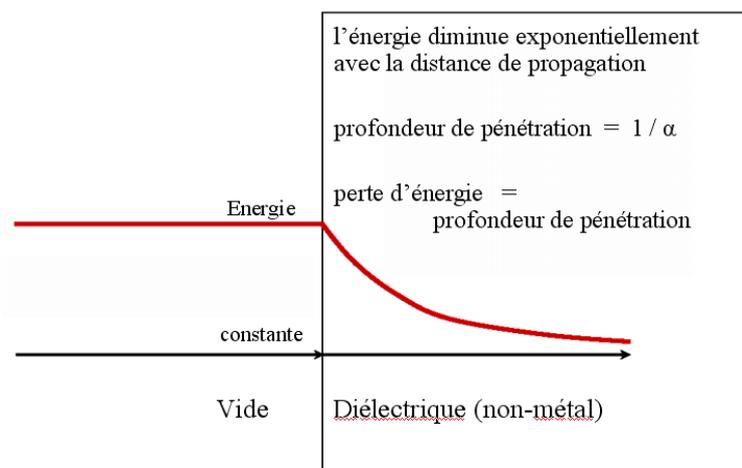
## 1.6 INTERACTION DE LA LUMIERE AVEC LA MATIERE

L'interaction de la lumière avec la matière - qui est **le principal sujet de l'optique** - est fondamentalement différente dans ces deux cas:

- Métaux – matériaux conducteurs, dans lesquels la lumière ne pénètre (presque) pas et est réfléchi.
- Diélectriques – matériaux non conducteurs.

Les matériaux traversés par la radiation électromagnétique (dont la lumière) sont appelés diélectriques.

Un matériau est diélectrique s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Autrement dit, c'est un milieu qui ne peut pas conduire le courant électrique. À ce titre, on l'appelle parfois isolant électrique.



## 1.7 LES MILIEUX OPTIQUES

On appelle milieu optique toute portion de l'espace matériel dans lequel se propage la lumière. On distingue habituellement:

- les **milieux transparents** tels que l'air, l'eau, le verre, qui laissent bien passer la lumière et au travers desquels on peut distinguer la forme des objets;
- les **milieux translucides** tels que le verre dépoli, le papier huilé, qui laissent passer la lumière, mais au travers desquels on ne peut pas distinguer la forme des objets;
- les **milieux opaques**, qui ne laissent pas passer la lumière.

Selon son épaisseur, une même matière peut être transparente, translucide ou opaque.

Un milieu transparent est caractérisé par un indice de réfraction  $n$  et un coefficient d'absorption  $\alpha$ . L'indice de réfraction  $n$  est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à celle dans ce milieu.

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.3)$$

La fréquence d'une onde électromagnétique **ne change pas** d'un milieu à un autre, ainsi la longueur d'onde et donc la couleur peuvent changer au passage d'un milieu à un autre.

Dans un milieu transparent le flux lumineux s'atténue selon une exponentielle décroissante:

$$\text{Loi de Beer:} \quad \Phi = \Phi_0 e^{-2\alpha x} \quad (1.4)$$

avec  $\alpha$  = coefficient d'absorption  
 $e^{-2\alpha x}$  = facteur de transmission

Le verre joue un rôle central en optique puisque c'est dans cette matière que sont traditionnellement faits les lentilles et les prismes. Le verre est une substance amorphe, c'est-à-dire non cristalline.

A la base, le verre est constitué de silice ( $\text{SiO}_2$ , oxyde de silicium) auquel on ajoute plusieurs substances pour obtenir les propriétés voulues. En général les fabricants donnent les facteurs de transmission en fonction de la longueur d'onde pour les différents types de verre.

## 1.8 LA PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

Dans un milieu homogène, on constate que la lumière se propage en ligne droite dans toutes les directions. La propagation rectiligne de la lumière est un cas particulier du principe de Fermat.

**Principe de Fermat:** *pour aller d'un point à un autre, la lumière se propage selon le trajet de plus courte durée.*

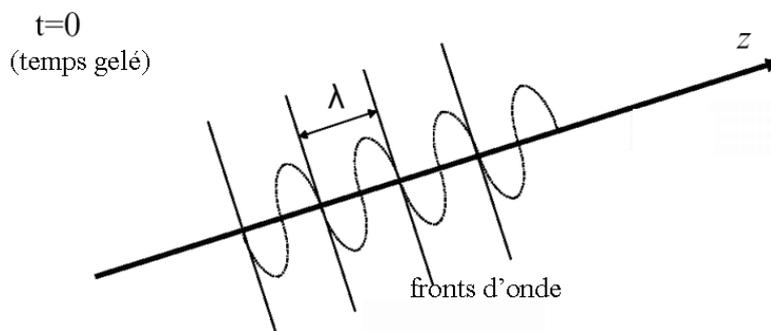
Dans un milieu homogène, ce trajet coïncide avec celui de plus courte longueur. S'il y a des réflexions, sur de miroirs par exemple, le minimum n'est pas un minimum absolu.

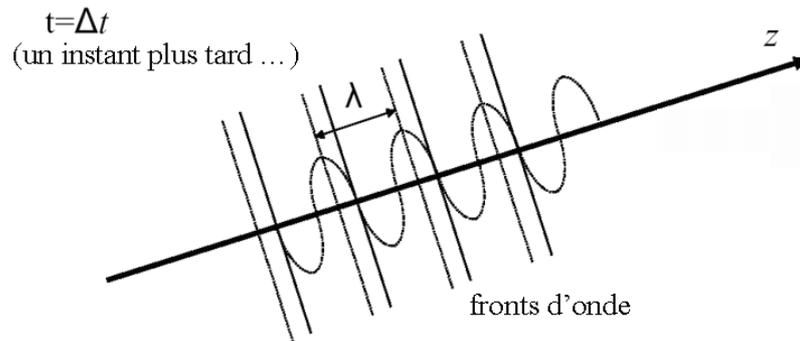
On constate aussi que pour aller d'un point  $B$  à un point  $A$ , la lumière suit le même trajet que pour aller de  $A$  à  $B$ . Ceci est connu sous le nom du principe du retour inverse.

**Principe du retour inverse:** *le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation.*

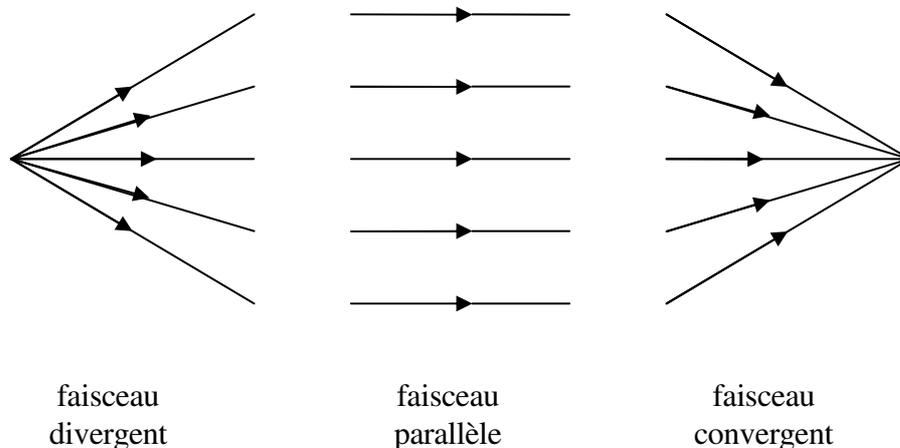
### 1.8.1 Le concept de rayon lumineux

En optique géométrique, on s'intéresse à la propagation des **rayons lumineux**. En fait, une onde lumineuse, comme toute onde en général, comporte des maxima et des minima qui évoluent dans l'espace. En faisant une analogie avec des vagues à la surface d'un lac: les fronts d'onde sont les lieux des maxima et ils se déplacent dans le sens des rayons.





Un ensemble de rayons constitue un **faisceau lumineux**.



Une source de lumière émet un faisceau divergent. Lorsqu'on s'en éloigne suffisamment, on peut considérer que les rayons sont parallèles: c'est le cas de la lumière qui nous vient du Soleil. On peut faire converger des rayons parallèles au moyen d'une lentille (loupe).

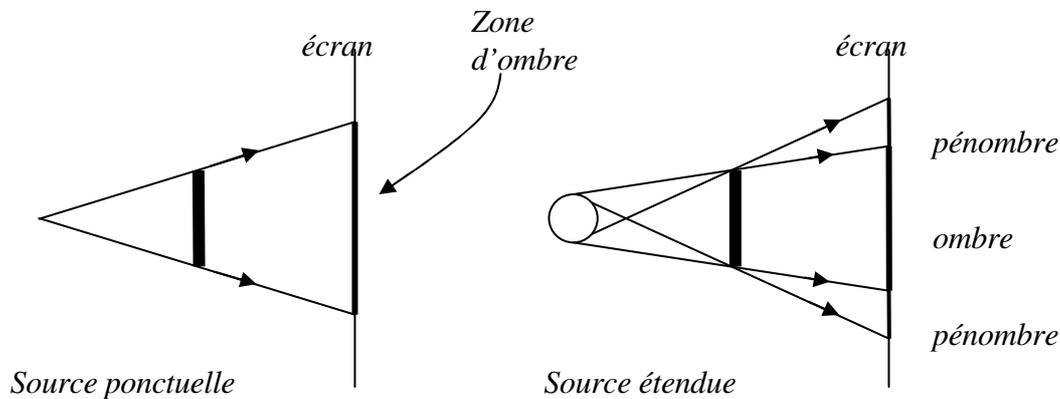
En général, les phénomènes lumineux que nous observons dans une portion de l'espace proviennent d'une **superposition** de faisceaux. On ne peut pas isoler un rayon lumineux.

Lorsqu'on projette un faisceau parallèle sur un écran percé d'une ouverture circulaire de diamètre réglable (diaphragme), l'expérience montre que l'on obtient d'abord un faisceau cylindrique comme prévu, puis lorsque l'ouverture est de l'ordre de  $0,1 \mu\text{m}$ , le faisceau a tendance à s'élargir, ce qui est en contradiction avec le principe de la propagation rectiligne.

Ce phénomène est connu sous le nom de **diffraction**. Il ne peut s'expliquer qu'en faisant intervenir la nature ondulatoire de la lumière. D'une manière générale, on ne peut faire abstraction de la nature ondulatoire de la lumière lorsque celle-ci se propage dans des structures **dont les dimensions sont comparables à sa longueur d'onde**.

### 1.8.2 Ombres et pénombres

Les objets opaques, en arrêtant la lumière, sont responsables de la formation d'ombres, qui s'expliquent par la propagation rectiligne de la lumière.



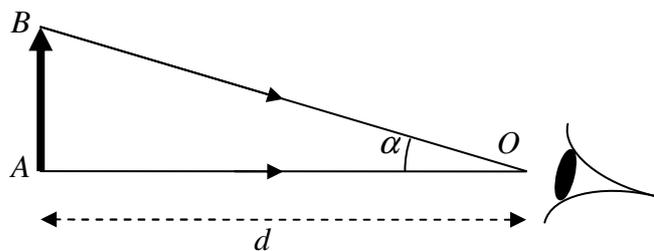
Ce phénomène explique les éclipses:

- Une éclipse de Soleil a lieu lorsque la Lune s'interpose entre le Soleil et l'observateur terrestre;
- Une éclipse de Lune a lieu lorsque celle-ci intercepte le cône d'ombre de la Terre.

### 1.8.3 Diamètre apparent d'un objet

Le diamètre apparent d'un objet est l'angle sous lequel l'observateur voit cet objet.

$$\tan \alpha = \frac{AB}{d}$$



Attention: en optique, le diamètre apparent est un angle et non une longueur. Selon le contexte, il est préférable d'utiliser l'expression **diamètre angulaire apparent**.

## 1.9 EXERCICES

1. L'œil humain est sensible, en principe, à la lumière de longueur d'onde entre 400 et 750 nm environ. En réalité la rétine photosensible est exposée à un milieu liquide d'indice  $n = 1,337$ . Quel est donc le spectre de la vraie sensibilité de la rétine ? **Rep.:** de 300 à 560 nm.
2. La fréquence d'une onde lumineuse bleue (430 nm) est-elle plus grande ou plus petite que celle d'une lumière rouge (650 nm) ?

## 2. LA REFLEXION

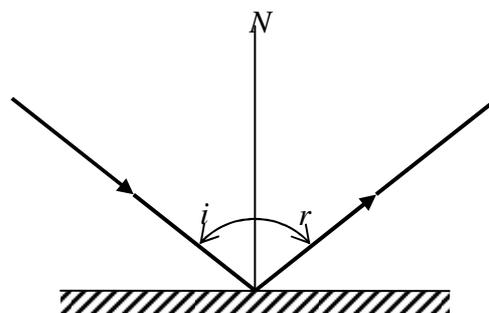
Expérimentalement on constate que les objets polis ont la propriété de réfléchir les rayons lumineux dans une direction privilégiée. Pour exprimer ce changement de direction de la lumière, on mesure les angles formés par les rayons incidents et réfléchis avec la normale à la surface réfléchissante.

### 2.1 LOI DE LA RÉFLEXION

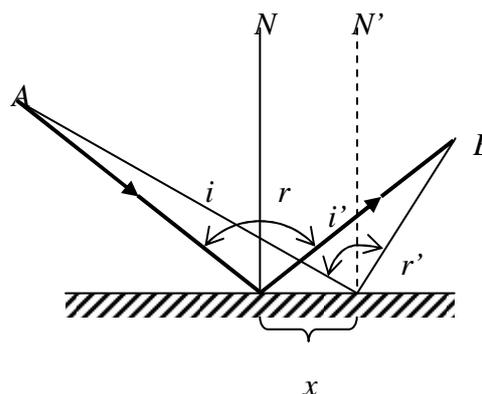
Les rayons incident et réfléchi sont dans un même plan.

Les angles formés par les rayons incident et réfléchi de part et d'autre de la normale sont égaux.

$$i = r$$



La loi de la réflexion est en accord avec le principe de Fermat. Le trajet de la lumière de A à B est minimum lorsque  $i = r$ .



### 2.2 EXERCICE

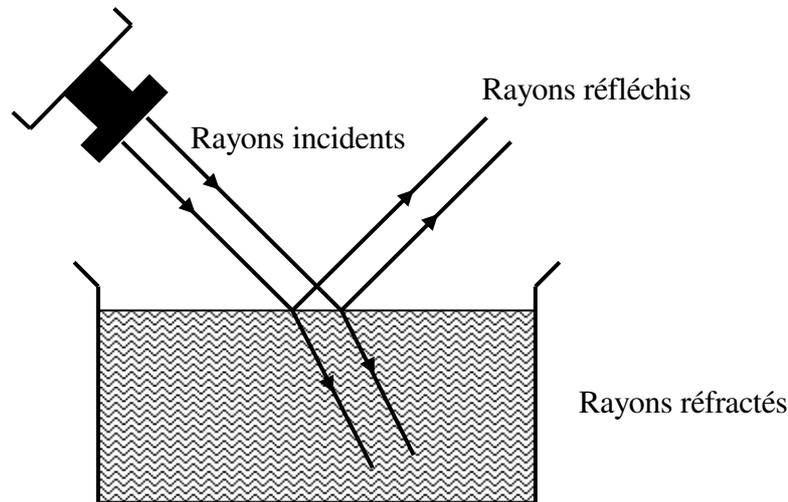
Démontrer la loi de la réflexion à partir du principe de Fermat.

(Choisir un point situé à une distance  $x$  du point de réflexion du rayon. Calculer la longueur du trajet et montrer qu'elle est minimale pour  $x = 0$ .)

### 3. LA RÉFRACTION

On appelle **réfraction** le brusque changement de direction que subissent les rayons lumineux lors de la traversée de la surface séparant deux milieux optiques différents.

Dirigeons un faisceau lumineux sur un récipient en verre rempli d'eau. Pour visualiser le faisceau, on peut, dans l'air, utiliser un peu de fumée, et colorer l'eau avec de la fluorescéine.



#### 3.1 LOI DE LA RÉFRACTION

La loi de la réfraction a été formulée indépendamment par Snell et Descartes<sup>4</sup>.

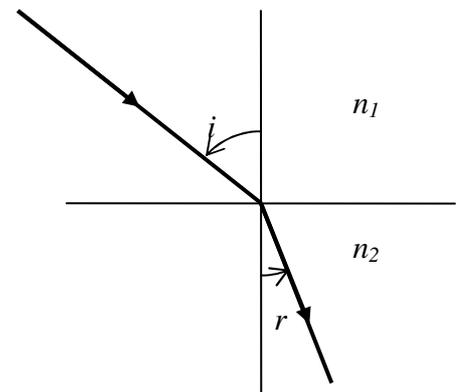
Les rayons incident et réfracté sont dans un même plan.

Les angles formés par les rayons incident et réfracté par rapport à la normale satisfont à la relation

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (3.1)$$

$n_1$  est l'indice de réfraction du milieu 1 (traversé par le rayon incident) est  $n_2$  l'indice de réfraction du milieu 2.

La relation (3.1) est connue comme l'équation de la réfraction de Snell-Descartes.



Sous sa forme actuelle, l'équation de la réfraction porte les noms de Snell et Descartes. Toutefois, il faut noter que le phénomène de la réfraction est connu depuis l'Antiquité. Tout le monde peut constater qu'un objet (bâton, crayon) plongé à moitié dans l'eau apparaît cassé.

<sup>4</sup> Willebrod Snell van Royen (1580 - 1626) ; René Descartes (1596 - 1650).



Un savant grec, Claude Ptolémée<sup>5</sup> (~100 – 170) publia des tables de réfraction pour l'eau et le verre.

Angle d'incidence $i$ [°]	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Angle de réfraction $r$ [°]	0	8	15,5	22,5	29	35	40,5	45,5	50

Table de Ptolémée pour la réfraction air-eau.

D'après des travaux d'historiens modernes<sup>6</sup>, la première mention faisant intervenir le rapport des sinus entre l'angle incident et l'angle réfracté, l'indice de réfraction, se trouve dans un traité sur les miroirs et les lentilles écrit vers 984 par Ibn Sahl<sup>7</sup>, mathématicien et ingénieur arabe associé à la cour de Bagdad. Ses travaux furent repris par Ibn Al Haytham<sup>8</sup>. Ses méthodes étaient nouvelles puisqu'il imagina des expériences pour confirmer ou infirmer les théories des anciens Grecs. Il étudia également l'anatomie de l'œil. Il écrivit plusieurs livres sur la lumière, les lentilles, la perspective, l'astronomie qui furent ultérieurement traduits en latin (Kittab al Manadir, Opticae Thesaurus) et qui inspirèrent les savants occidentaux comme Roger Bacon et René Descartes.

<sup>5</sup> Dans son grand traité, l'almageste, Ptolémée rassemble les connaissances mathématiques, géographiques et astronomiques de son temps. Son ingénieux système cosmologique géocentrique, qui fit autorité durant 14 siècles, était capable de rendre compte des mouvements des 7 planètes connues à son époque.

<sup>6</sup> R. Rashed, Géométrie et dioptrique au X<sup>e</sup> siècle : Ibn Sahl, Al Quhi et Ibn Al Haytham. Paris, Les Belles Lettres, 1993.

<sup>7</sup> Abu Sa'd al Ala ibn Sahl (~940 – 1000).

<sup>8</sup> Abu Ali Hasan ibn al Haytham (Bassora, 965 – Le Caire, 1040), connu aussi en Occident sous le nom de Alhazen.

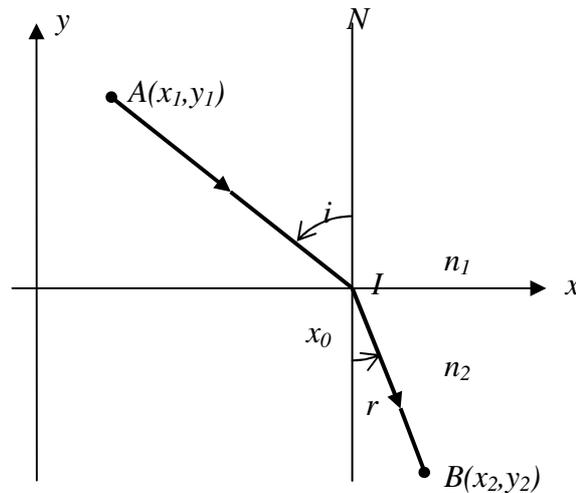
### 3.2 EXERCICE

Démontrer que la loi de Snell-Descartes est en accord avec le principe de Fermat.

#### Réponse:

Choisir un point situé à une distance  $x$  du point de réflexion du rayon. Calculer la longueur du trajet et montrer qu'elle est minimale pour  $x = 0$ .

Soit  $A(x_1, y_1)$  le point de départ du rayon incident,  $I(x_0, 0)$  le point d'incidence et  $B(x_2, y_2)$  le point d'arrivée du rayon réfracté. Nous allons chercher  $x_0$  tel que le temps de propagation soit minimum.



Le temps de propagation de la lumière se  $A$  à  $B$  est égal à  $t = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$ .

$$t = \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}}{c/n_2}$$

Cherchons la valeur de  $x_0$  qui minimise le temps de propagation:

$$\frac{dt}{dx_0} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{c} \frac{(x_0 - x_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{(x_2 - x_0)}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}} = 0$$

Ce qui, après multiplication par  $c$  et tenant compte de la définition du sinus, redonne bien l'équation de Snell-Descartes.

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

### 3.3 INDICE DE RÉFRACTION DE QUELQUES SUBSTANCES

Comme l'indice varie avec la longueur d'onde, les valeurs ci-dessous sont données pour  $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$  (raie jaune d'une lampe au sodium).

Substance	Indice
Verre	1,46 à 1,96
Crown	1,52
Flint léger	1,57
Flint lourd	1,60
Cristal	1,67

Substance	Indice
Polystyrène	1,59
Diamant	2,417
Eau	1,334
Ethanol	1,363
Air	1,000293

Il existe des tables donnant les indices de réfractons correspondant aux longueurs d'onde de référence (tables CRM, CRC Handbook of Chemistry and Physics), ainsi que des sites web dédiés (ex. <http://refractiveindex.info>).

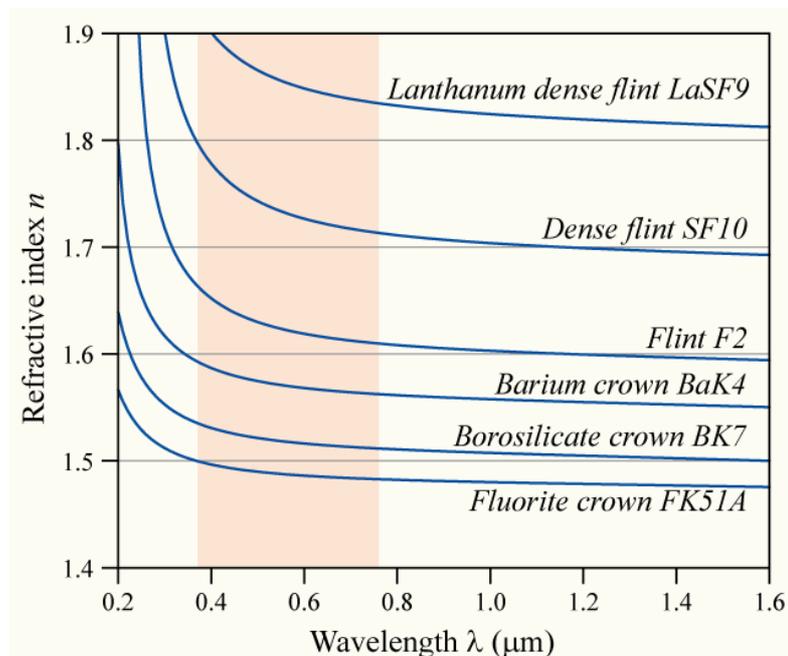


Figure 3-1 Indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde pour les principaux verres optiques.

Pour les verres, il existe aussi plusieurs formules empiriques permettant de calculer l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde. Par exemple:

Formule de Cauchy 
$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

Formule de Schott (1950) 
$$n^2 = a_0 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^{-2} + a_3\lambda^{-4} + a_4\lambda^{-6} + a_5\lambda^{-8}$$

Formule de Sellmeier 
$$n^2 - 1 = \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

Les fabricants de verres optiques donnent en général les valeurs des coefficients, ainsi que le domaine de validité des formules, et d'autres caractéristiques, telles que facteurs de transmission.

### 3.4 ANGLE LIMITE ET RÉFLEXION TOTALE

Lorsque le rayon incident devient tangent à la surface de séparation ( $i \rightarrow \pi/2$ ) l'angle d'émergence du rayon réfracté tend vers une limite qui vaut:

Angle limite  $r_L = \arcsin(n_1/n_2)$  (3.3)

Exemple: interface air / eau

- L'indice de réfraction de l'eau vaut environ  $n = 1,33$

- L'angle limite est:  $r_L = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) = 48,6^\circ$

<p>Par le principe du retour inverse, un rayon ne pourra pénétrer dans un milieu d'indice plus faible si l'angle qu'il forme avec la normale est plus grand que l'angle limite.</p> <p>Si <math>r &gt; r_L</math>, il y a <b>réflexion totale</b><sup>9</sup>.</p>	
--	--

La réflexion totale est utilisée dans de nombreuses applications; citons par exemple:

<p><b>Le prisme à réflexion totale</b></p> <p>Des paires de prismes de ce type sont utilisés dans les jumelles pour redresser l'image et diminuer la longueur de l'instrument.</p>	
<p><b>Les fibres optiques</b></p> <p>dimensions typiques:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• gaine: <math>\varnothing = 125 \mu\text{m}</math></li> <li>• cœur: <math>\varnothing \approx 10 \mu\text{m}</math></li> <li>• <math>n_{\text{cœur}} &gt; n_{\text{gaine}}</math></li> </ul>	

<sup>9</sup> La réflexion totale a été découverte en 1604 par l'astronome allemand Johannes Kepler (1571 – 1630).

### 3.5 DISPERSION CHROMATIQUE ET NOMBRE DE ABBE

L'indice de réfraction d'un verre varie en fonction de la longueur d'onde, ce qui provoque une dispersion chromatique.

Pour calculer le **pouvoir dispersif** d'une substance,  $dn/d\lambda$ , dans la pratique, on introduit le nombre d'Abbe<sup>10</sup>, défini comme suit:

Nombre d'Abbe

$$A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

(4.5)

Où les indices de réfraction sont mesurés aux longueurs d'ondes suivantes:

$\lambda_C = 656,3 \text{ nm}$  Raie  $H_\alpha$  de l'hydrogène (rouge)

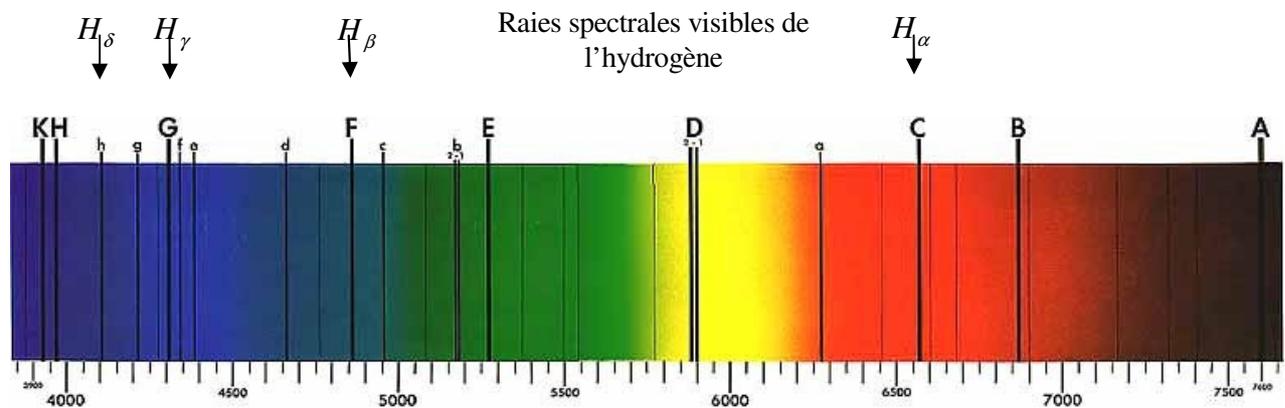
$\lambda_F = 486,1 \text{ nm}$  Raie  $H_\beta$  de l'hydrogène (bleu)

$\lambda_D = 587,6 \text{ nm}$  Raie de l'hélium (jaune)<sup>11</sup>

Le nombre d'Abbe peut être mesuré expérimentalement. Plus il est grand, plus le pouvoir dispersif est petit. Selon de type de verre  $A$  varie de 35 à 65 environ.

Historiquement, les raies spectrales ont été découvertes par Fraunhofer (1787 - 1826) dans le spectre solaire. Il s'agissait de raies noires, interprétées plus tard comme provenant de l'absorption de la lumière par les atomes de gaz tels que l'hydrogène, l'hélium ou l'oxygène de l'atmosphère.

Les **raies de l'hydrogène** sont particulièrement nettes; et elles servent de références.



Raies d'absorption de Fraunhofer (échelle en ångströms, 1 Å = 0,1 nm)

Les longueurs d'ondes des raies de l'hydrogène visibles sont listées dans la table ci-contre.

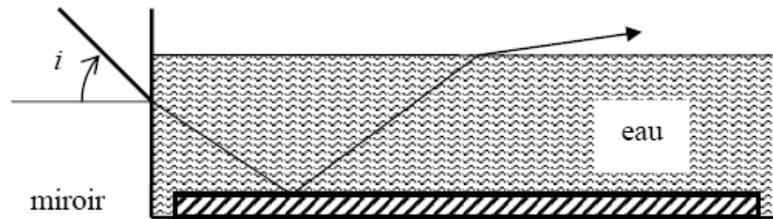
Raie	$\lambda$ [nm]	$n$
$H_\alpha$	656,28	3
$H_\beta$	486,13	4
$H_\gamma$	434,05	5
$H_\delta$	410,1	6

<sup>10</sup> Ernst Abbe (Eisenach, 1840 – Jena, 1905). Un des fondateurs avec Carl Zeiss et Otto Schott de l'optique moderne.

<sup>11</sup> L'ancienne définition se base sur la raie jaune du sodium ( $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$ ), qui est en fait un doublet.

### 3.6 EXERCICES

1. Quelle est la vitesse de la lumière dans l'eau ?
2. Soit un récipient parallélépipédique en verre contenant de l'eau. Un miroir est posé au fond du récipient. À partir de quelle valeur de l'angle  $i$  le rayon peut-il émerger ? (voir figure ci-dessous.)



## 4. LAMES ET PRISMES

### 4.1 LAME À FACES PARALLÈLES

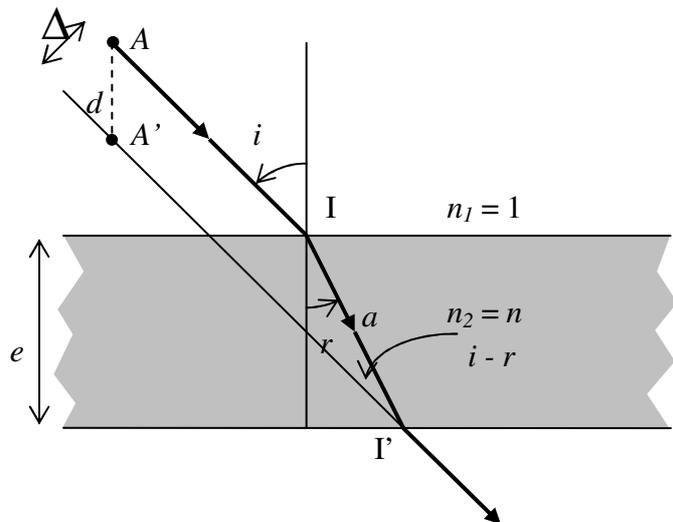
Un rayon lumineux incident sur une lame à faces parallèles **en ressort avec le même angle**.

Mais en général il subit un déplacement latéral  $\Delta$  que nous pouvons calculer en fonction de l'angle d'incidence, de l'épaisseur de la lame et de son indice de réfraction

Soit  $a$  = distance I-I'.

D'après le dessin ci-contre:

$$\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ \frac{e}{a} = \cos r \\ \frac{\Delta}{a} = \sin(i - r) \end{cases}$$



Ce qui donne:

$$\Delta = a \sin(i - r) = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r} = e \frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\cos r}$$

$$\Delta = e \left( \sin i - \cos i \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} \right) = e \left( \sin i - \cos i \frac{(\sin i)/n}{\sqrt{1 - ((\sin i)/n)^2}} \right)$$

D'où finalement, le déplacement latéral:  $\Delta = e \sin i \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$

Pour des rayons proches de la normale,  $\sin i \rightarrow i$ ,  $\sin^2 i \rightarrow 0$  et  $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} \rightarrow 1$ .

Déplacement latéral pour  $i \rightarrow 0$   $\Delta \approx ei \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$  (4.1)

L'image d'un point A est un point A'. La distance  $d = AA'$  vaut  $d = \frac{\Delta}{\sin i} \approx e \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ .

Déplacement apparent  $d \approx e \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$  (4.2)

Ainsi, vu au travers d'une lame à face parallèle d'indice  $n > 1$ , un objet paraît plus proche qu'il n'est en réalité.

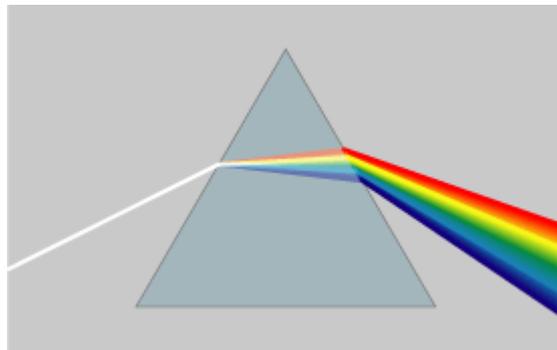
## 4.2 LES PRISMES

En optique, un prisme est un milieu transparent limité par deux faces planes non parallèles.

Ces deux faces forment un dièdre: l'angle  $\alpha$  du dièdre est l'angle du prisme; l'arête du dièdre est l'arête du prisme.

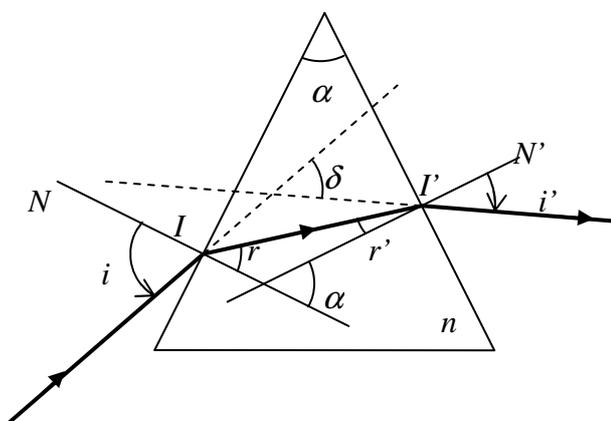
Un prisme est un élément optique utilisé pour réfracter la lumière, la réfléchir ou la disperser en ses constituants (les différents rayonnements de l'arc-en-ciel pour la lumière blanche). C'est traditionnellement un prisme (solide) droit à base triangulaire, constitué d'un matériau transparent: verre, plexiglas, notamment.

**Le prisme permet de mettre en évidence la dispersion de la lumière blanche**, ou en d'autres termes, le fait que l'indice de réfraction dépend de la couleur (longueur d'onde). Il a été donc beaucoup utilisé en spectrographie.



### 4.2.1 Géométrie

Etudions maintenant la marche d'un rayon monochromatique contenu dans un plan perpendiculaire à l'arête du prisme (dans un plan principal). Soit  $I$  le point d'incidence et  $I'$  le point d'émergence.  $N$  et  $N'$  sont les normales en ces points.



**Equations du prisme:**

$$\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ \sin i' = n \sin r' \\ \alpha = r + r' \\ \delta = i + i' - \alpha \end{cases} \quad (4.3)$$

$\delta$  est l'angle de déviation.

Convention pour le signe de  $i$ :  $i$  est compté positif dans le cas de la figure ci-dessus et négatif si le rayon incident est entre la normale et l'arête du prisme. Idem pour  $i'$ .  $i$  est toujours du même signe que  $r$ , de même que  $i'$  et  $r'$ . Dans tous les cas, le rayon émergent est rabattu vers la base du prisme.

### 4.2.2 Le minimum de déviation

Si l'on varie expérimentalement l'angle d'incidence, on constate que l'angle de déviation passe par un minimum, qui est atteint lorsque la marche du rayon est symétrique par rapport au plan de symétrie du prisme, autrement dit lorsque  $i = i'$  et  $r = r'$ .

Pour établir théoriquement l'existence de ce minimum, partons des équations du prisme (4.3). Différentions les trois premières et dérivons la dernière par rapport à  $i$ .

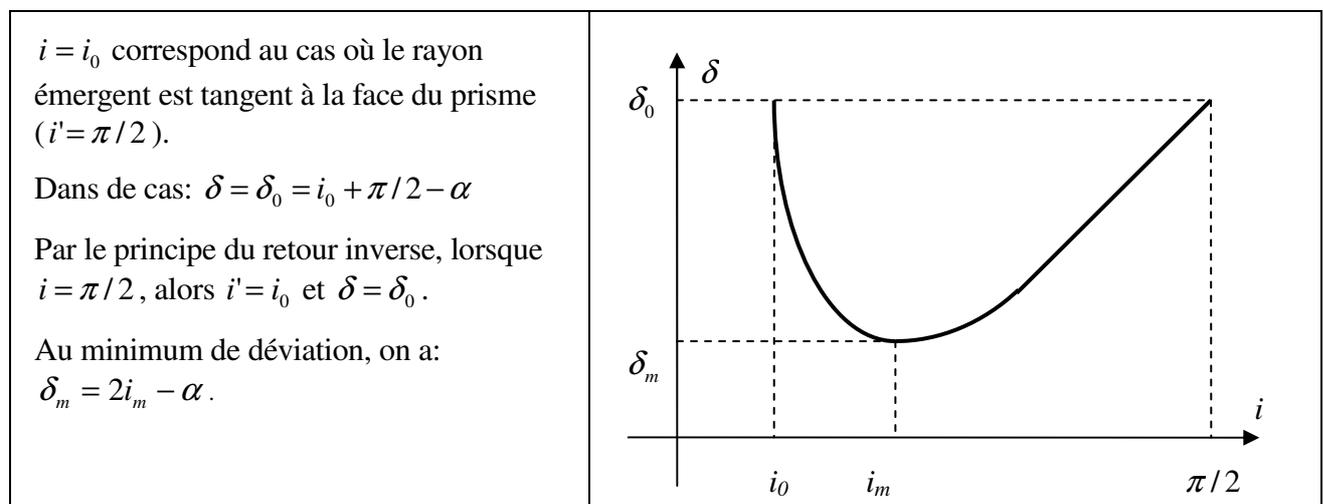
$$\begin{cases} \cos i \, di = n \cos r \, dr \\ \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr' \\ dr + dr' = 0 \\ \frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di} \end{cases}$$

Donc: 
$$\frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

Cette expression s'annule si:

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'} \quad \text{ou bien} \quad \frac{1 - n^2 \sin^2 r}{\cos^2 r} = \frac{1 - n^2 \sin^2 r'}{\cos^2 r'}$$

Il en résulte que  $r = r' = \alpha/2$ . (La solution  $r = -r'$  est exclue car elle impliquerait  $\alpha = 0$ .)



Exprimons enfin l'indice de réfraction en fonction de l'angle minimum de déviation  $\delta_m$ :

$$n = \frac{\sin i_m}{\sin r_m} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (4.4)$$

Calculons encore la pente de  $\delta(i)$  en  $i = i_0$  et  $i = \pi/2$ .

$$\text{En } i = i_0, \quad i' = \pi/2 \quad \frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i_0}{\cos r \cos(\pi/2)} = -\infty \quad \text{car } \cos(\pi/2) = 0.$$

$$\text{En } i = \pi/2 \quad \frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos(\pi/2)}{\cos r \cos i_0} = 1$$

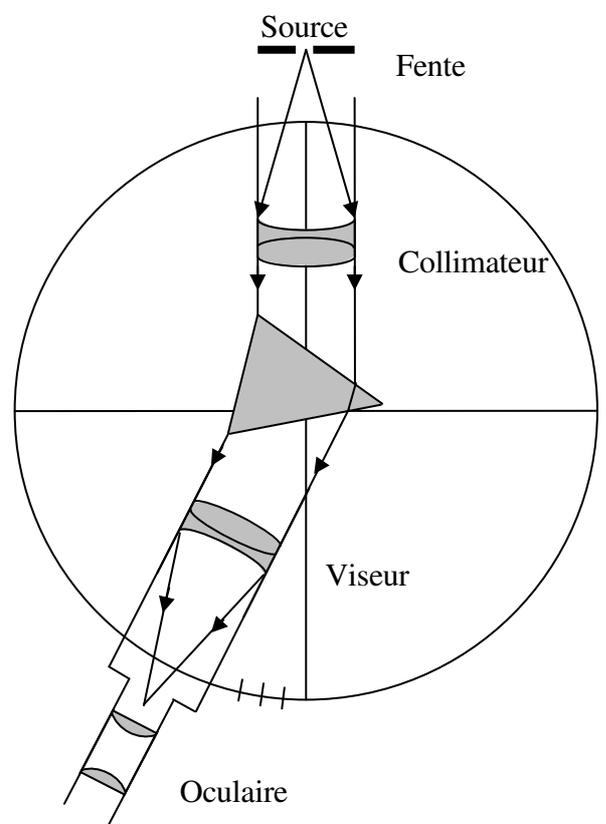
L'expression (4.4) est importante car elle fournit une méthode expérimentale pour mesurer les indices de réfraction de manière précise.

La figure ci-contre schématise un **goniomètre**, appareil qui permet de mesurer les angles avec précision.

Une source placée derrière une fente au foyer d'une lentille produit un faisceau parallèle qui tombe sur un prisme d'axe vertical. Le viseur et l'oculaire permettent d'observer le faisceau émergent.

En faisant tourner le goniomètre, on constate que la déviation passe par un minimum, que l'on peut mesurer à l'aide de graduations.

Des lampes de couleurs différentes permettent de mesurer l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde.

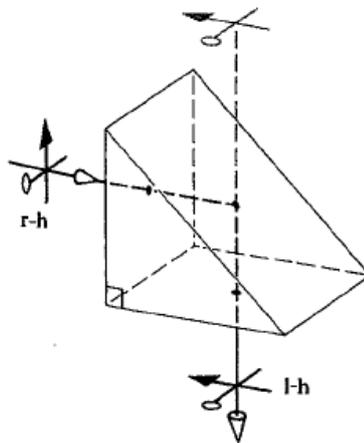


### 4.2.3 Exercices

1. Un prisme a un angle au sommet de  $60^\circ$  et un indice  $n = 1,6$ . Quel doit être l'angle d'incidence pour que le rayon puisse émerger du prisme ? Quel est l'angle d'incidence qui correspond au minimum de déviation ?

**Rép.**  $i > 35,57^\circ$ ,  $i_{min} = 53,13^\circ$ ,  $D = 46,26^\circ$

2. Un prisme à angle droit provoque une rotation de  $90^\circ$  pour les rayons incidents normaux à sa face d'entrée. Quelle est la rotation pour des incidences différentes (variable dans le plan de la section triangulaire du prisme) ?



## 5. FORMATION DES IMAGES

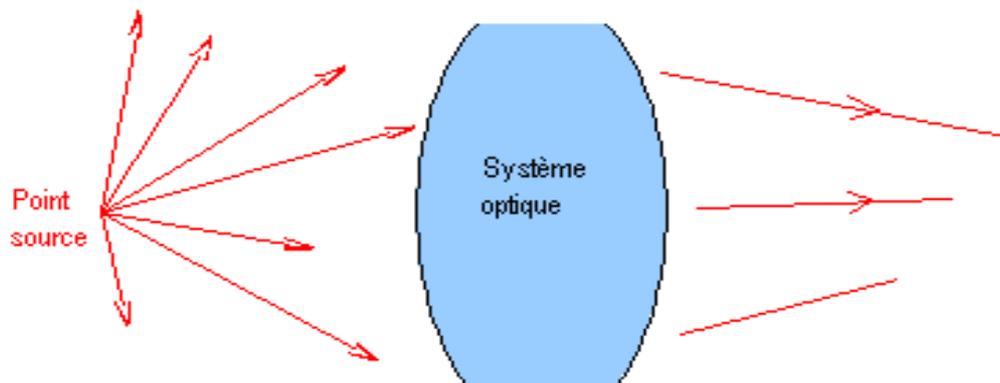
Le mot **image** renvoie à de nombreux sens. En liaison avec la vision, le mot désigne toute représentation d'un objet réel, qu'il s'agisse d'un tableau, dessin, ou d'une projection sur un écran.

En physique, et notamment en optique géométrique, le mot image correspond à une définition très précise. Sur le plan expérimental, on a le cas de la projection d'une diapositive sur un écran, par exemple (on parle alors d'image réelle), mais également celui de l'image que l'on voit dans un miroir, ou à travers une loupe (on parle alors d'image virtuelle).

Sur le plan théorique, la définition de l'image ne fait pas référence à un support mais s'appuie sur la notion de **stigmatisme**.

### 5.1 OBJET ET SYSTÈME OPTIQUE

En optique, on désigne simplement par **objet** tout dispositif émettant ou diffusant de la lumière. La flamme d'une bougie peut être considérée comme un objet lumineux, un trou percé dans un écran et éclairé par derrière, une diapositive éclairée, une préparation sur lamelle pour mettre sur la platine d'un microscope, la Lune, etc., sont des objets.



Point source (objet) et système optique

L'observation de ces objets passe généralement par l'usage d'instruments d'optique: loupe, microscope optique, lunette astronomique, télescope, jumelles, appareil photo, etc.. De tels instruments sont des systèmes de lentilles et miroirs qui guident par réflexion et réfraction la lumière jusqu'à l'œil, l'écran, la pellicule ...

De façon générale, on parle alors de **système optique**. L'œil est également un système optique qui peut être modélisé par un dioptre sphérique ou une lentille et un écran (la rétine).

L'analyse de la formation des images d'objets par des instruments d'optique repose sur la modélisation de tout objet comme un ensemble de points lumineux: de chaque point de l'objet partent ainsi des rayons lumineux dont une partie est interceptée par le système optique.

## 5.2 IMAGE ET STIGMATISME

En optique, on dit obtenir **l'image d'un point-objet**, lorsque tous les rayons issus de ce point et passés par le système optique, convergent en un point unique, ou bien semblent provenir d'un point unique.

On parle alors de **point image** ou de **l'image du point**.

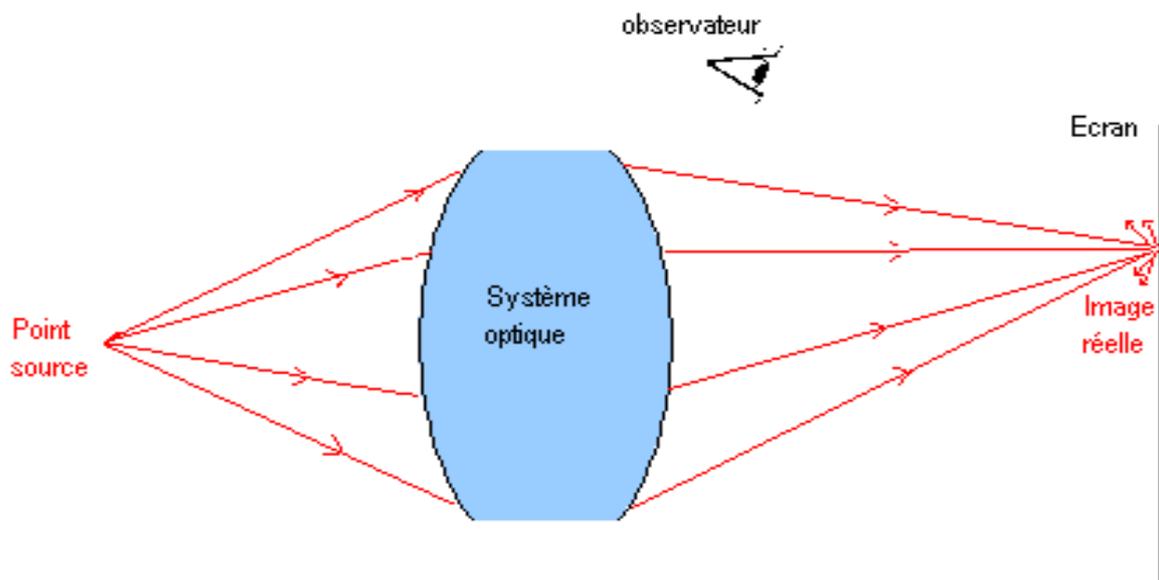


Image réelle recueillie sur un écran.

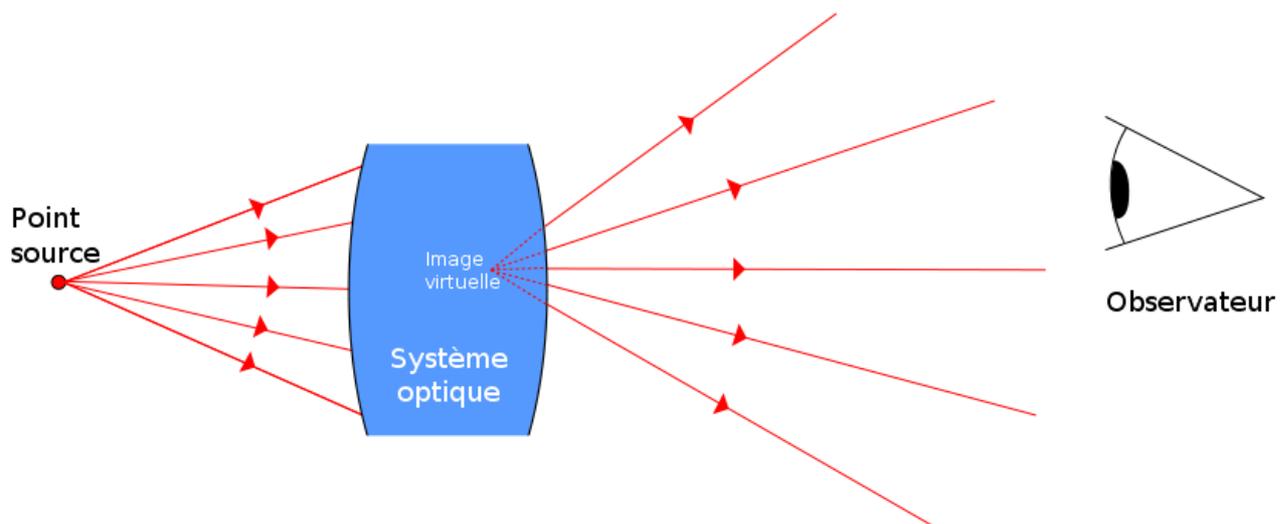


Image virtuelle visible par un œil placé dans le faisceau.

Dans le premier cas on dit que l'image est réelle: les rayons peuvent être reçus sur un écran *placé au bon endroit*. Dans l'autre cas, l'image est dite virtuelle: on peut la voir en plaçant directement son œil dans le faisceau émergent (l'œil accommode automatiquement).

Attention: l'image, qu'elle soit réelle ou virtuelle **existe indépendamment de la présence d'un écran ou de l'œil**. L'image réelle d'une diapositive placée dans un projecteur existe même si l'on n'a pas mis d'écran.

La propriété qui, à un point objet associe **un seul** point image s'appelle le **stigmatisme**.

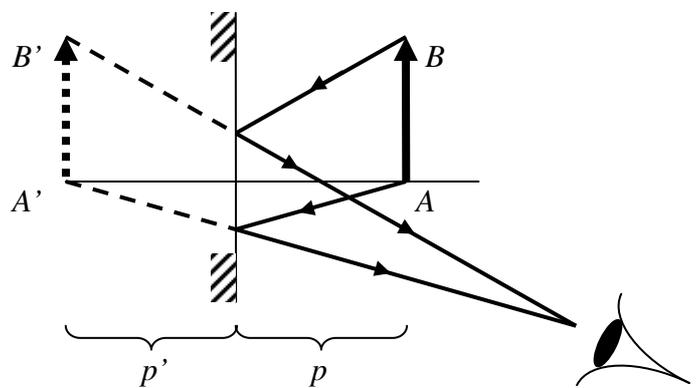
Une telle propriété des systèmes optiques est rare. Seul le miroir plan est stigmatique pour tout point. D'autres systèmes ne sont rigoureusement stigmatiques que pour quelques points particuliers. Dans de nombreux cas (en particulier pour les lentilles) on doit se contenter d'un stigmatisme approché (voir plus loin).

### 5.3 CAS DU MIROIR PLAN

En regardant un objet dans un miroir, on voit une **image virtuelle** symétrique de cet objet, située derrière le miroir.

Le miroir plan est stigmatique pour tout point.

La distance de l'objet au miroir est celle du miroir à l'image sont égales.

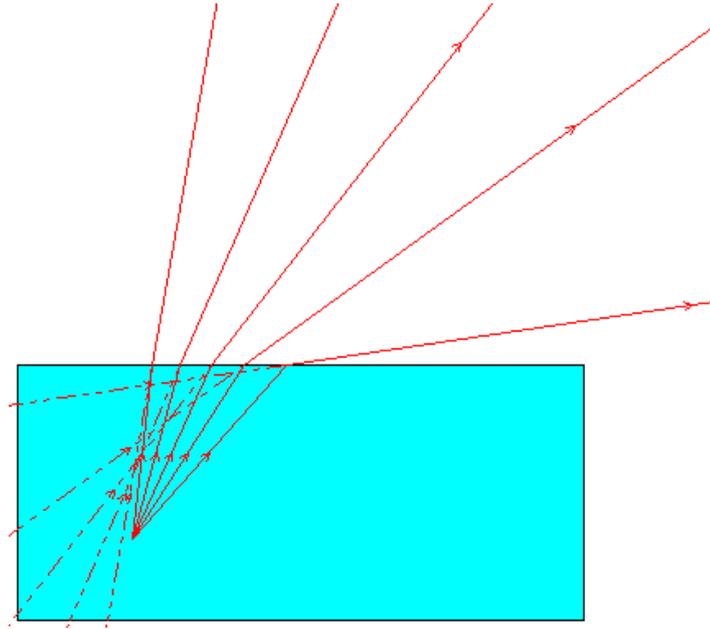


### 5.4 DIOPTRE PLAN

En optique, un dioptré est une surface séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Si la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène et isotrope, elle est déviée lors du passage d'un dioptré: il y a réfraction. De façon générale, il y a à la fois réfraction et réflexion: une partie de la lumière est réfléchiée à la surface du dioptré et l'autre partie est réfractée lors de son passage dans l'autre milieu.

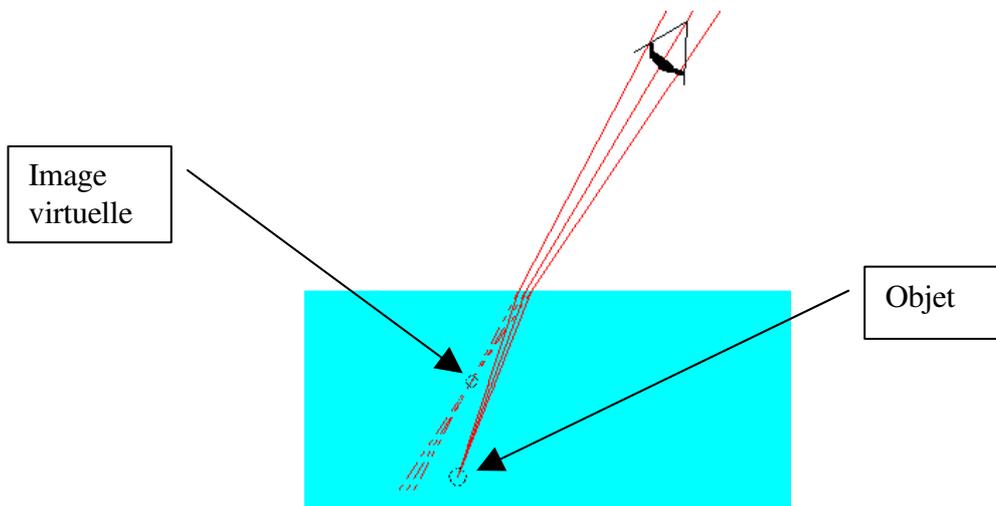
Le changement de direction au niveau du dioptré est décrit par la loi de Snell-Descartes qui fonde l'optique géométrique. Ces lois peuvent se représenter graphiquement en les appliquant à un rayon unique - dit incident - interceptant le dioptré en un point dit point d'incidence. Pour comprendre l'effet d'un dioptré sur la lumière, il faut considérer un nombre minimal de rayons de façon à représenter le faisceau de lumière.

Une des conséquences de la loi de Snell-Descartes est que le **dioptré plan** est un système non-stigmatique. L'illustration ci-dessus montre que la lumière issue d'un point placé dans un aquarium, par exemple, donne des rayons réfractés dans l'air qui ont des directions sans point commun.



Non stigmatisme du dioptre plan: il n'y a pas d'image du point objet puisque les rayons sortants ne convergent pas en un seul point.

Pourtant, lorsqu'on regarde un poisson, on le voit bien ! C'est donc que le poisson, par exemple, constitue un objet lumineux qui forme une image sur la rétine de l'œil de l'observateur. Ceci n'est possible que parce que le faisceau de lumière est suffisamment étroit pour que la tache sur la rétine apparaisse comme un point. On est bien alors dans un cas de stigmatisme approché.

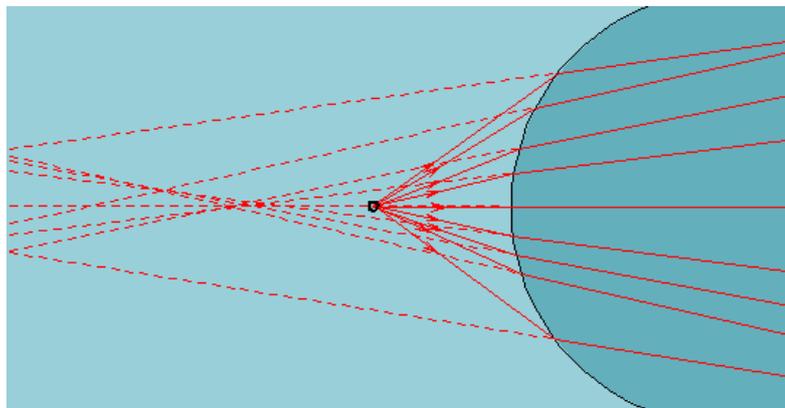


Stigmatisme approché quand le faisceau de lumière est suffisamment étroit pour que la tache sur la rétine apparaisse comme un point.

## 5.5 DIOPTRE SPHÉRIQUE

L'application de la loi de Snell-Descartes permet également de traiter le cas des dioptrés non plan. Il suffit de considérer localement la normale au dioptré point d'incidence de chaque rayon contribuant au faisceau.

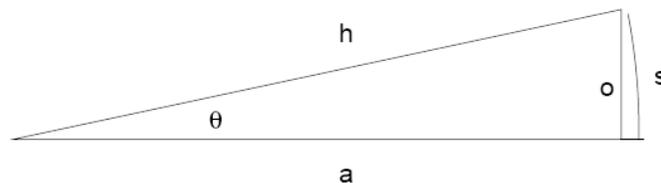
De nouveau, par construction géométrique, on constate que le **dioptré sphérique** n'est pas stigmatique, sauf évidemment pour son centre, puisque chaque rayon arrivant perpendiculairement au dioptré n'est pas dévié. L'image du centre est alors le centre lui-même. (En fait, il est également stigmatique pour deux autres points particuliers de l'axe optique, appelés points de Weierstrass).



Non stigmatisme du dioptré sphérique

## 5.6 APPROXIMATION DE GAUSS OU PARAXIALE

Lorsqu'une faible partie de la sphère définissant la géométrie du dioptré est utilisée ou, autre façon de dire, lorsque le rayon de courbure est très grand devant les dimensions liées à l'objet (taille, distance), on peut se placer dans les conditions dites de Gauss: on ne considère alors que les rayons qui passent près de l'axe et qui sont peu inclinés. Ceci permet d'assimiler la valeur d'un angle à son sinus et à sa tangente.



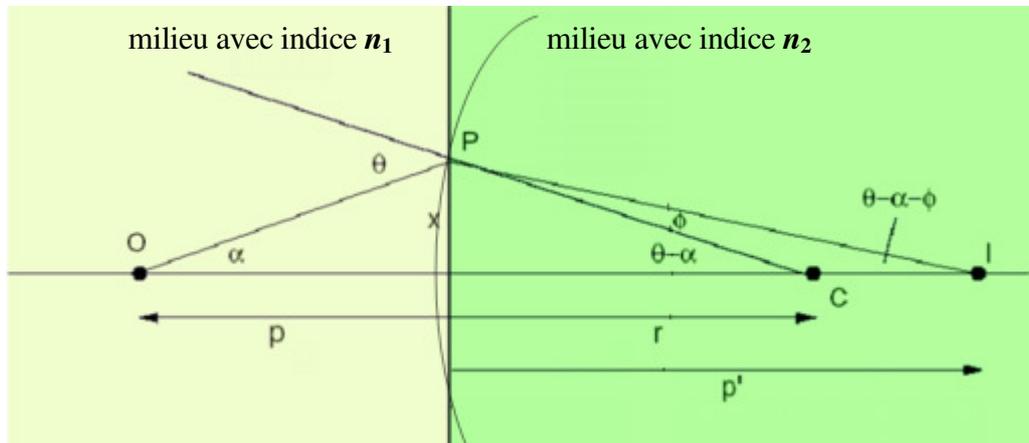
$$\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$$

Cette **approximation paraxiale** suppose une faible divergence du faisceau par rapport à son axe de propagation. L'angle de divergence maximal  $\theta$  généralement admis est de l'ordre de **20°**.

La conséquence mathématique est la possibilité d'assimiler les sinus à la valeur des angles (en radians) et la conséquence physique est que l'on est alors dans les conditions d'un **stigmatisme approché**: dès lors, à un point objet, on peut associer un (seul) point image.

### 5.7 CALCUL DE LA REFRACTION PAR UNE SURFACE SPHERIQUE:

Calculons la position  $p'$  de l'image d'un point situé à la position  $p$  devant la lentille, avec les hypothèses de Gauss: la courbure de la surface étant petite on l'assimilera à une surface plane, toutefois avec un rayon de courbure fini, et donc un centre de courbure défini !



$p$  = distance de l'objet  
 $p'$  = distance de l'image

$r$  = rayon de la sphère  
 C = centre de la sphère

Dans la figure un point O émet un rayon le long de l'axe optique, et un autre vers le point P de l'interface où il est réfracté et intersecte le premier pour former une image au point I. Dans ce cas, aussi, la surface est convexe, et donc le centre de courbure de la surface se trouve à droite de l'interface (par convention, le rayon de courbure est positif si le centre de courbure est du côté émergent de la lumière).

Pour le rayon oblique émis avec un angle  $\alpha$  d'inclinaison sur l'axe, l'angle d'incidence est  $\theta$  et l'angle réfracté est  $\phi$ . La loi de Snell devient pour les petits angles

$$n_1 \theta = n_2 \phi$$

Par géométrie on a aussi

$$\alpha = \frac{x}{p}$$

$$\theta = \frac{x}{p} + \frac{x}{r}$$

$$\phi = \frac{x}{r} - \frac{x}{p'}$$

En substituant  $\theta$  et  $\phi$  dans la loi de Snell, on obtient

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{r} = \frac{n_2}{r} + \frac{n_2}{p'}$$

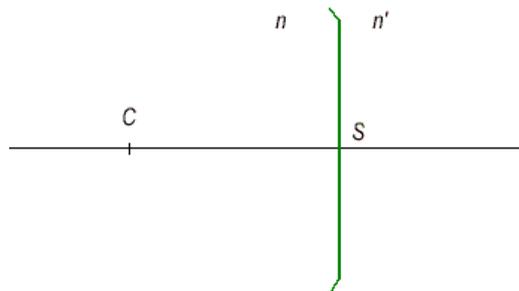
ce qu'on peut réarranger en

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.1)$$

Et si  $n_1 = 1$ , pour un passage de l'air à du verre d'indice  $n$ , on a

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r} \quad (5.2)$$

Notons ici que les dioptrés sphériques sont représentés de façon conventionnelle ainsi:



Schématisme d'un dioptré sphérique dont la courbure est ici centrée sur le point C.

## 5.8 FOYERS ET DISTANCES FOCALES OBJET ET IMAGE POUR UN DIOPTRE SPHÉRIQUE

On appelle **foyer image**  $F_i$  l'image d'un objet situé à l'infini: c'est donc le point où focalisent des rayons qui se propagent parallèlement à l'axe optique.

On appelle **foyer objet**  $F_o$  le point dont l'image est située à l'infini: les rayons issus de ce point se propagent - après traversée de la lentille - parallèlement à l'axe optique.

L'équation (5.2) permet de définir pour un dioptré sphérique **deux distances focales distinctes**:

$$\text{distance focale image: } f_i = \frac{nr}{n-1} \quad (5.3)$$

$$\text{distance focale objet: } f_o = \frac{r}{n-1} \quad (5.4)$$

Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par  $F_i$  est appelé **plan focal image**.

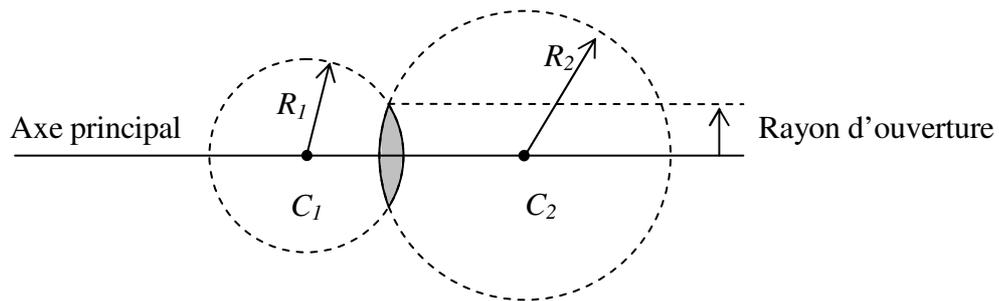
## 5.9 EXERCICE

Un dioptré sphérique de rayon 80 cm et centre dans le verre sépare l'air du verre ( $n = 1,5$ ). Trouver les distances focales. Déterminer la position de l'image si l'objet se trouve à 200 cm devant le dioptré. **Rep.**  $f_o = -160$  cm,  $f_i = 240$  cm,  $p' = 1200$  cm.

## 6. LES LENTILLES

### 6.1 DÉFINITIONS

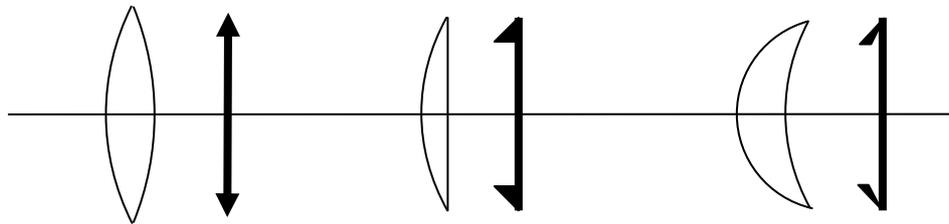
Une lentille sphérique est un milieu transparent, en général du verre, limité par deux calottes sphériques, ou une calotte et un plan. On appelle **axe principal** la droite joignant le centre des deux faces sphériques.  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure.



Le **rayon d'ouverture** de la lentille est le rayon du cercle du bord de la lentille.

On distingue plusieurs types de lentilles:

#### Lentilles convergentes

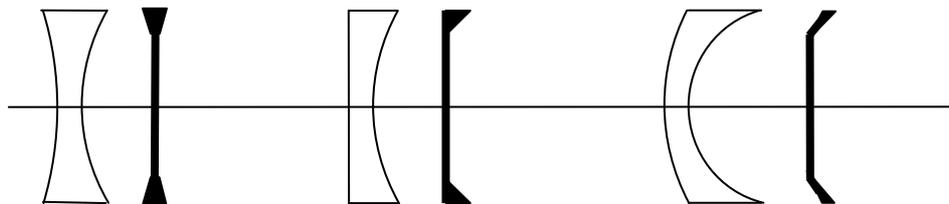


a) Biconvexe

b) Plan-convexe

c) Ménisque convergent

#### Lentilles divergentes



d) Biconcave

e) Plan-concave

f) Ménisque divergent

## 6.2 CALCUL DES LENTILLES

### 6.2.1 Procédure générale

Le calcul de la marche de rayons à travers les lentilles est assez compliqué dans le cas général.

Mais, comme pour les dioptries sphériques dont il reprend le principe, il se simplifie grandement si l'on fait l'**approximation de Gauss** ou **paraxiale**, c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse que les rayons sont peu inclinés et s'écartent peu de l'axe principal:

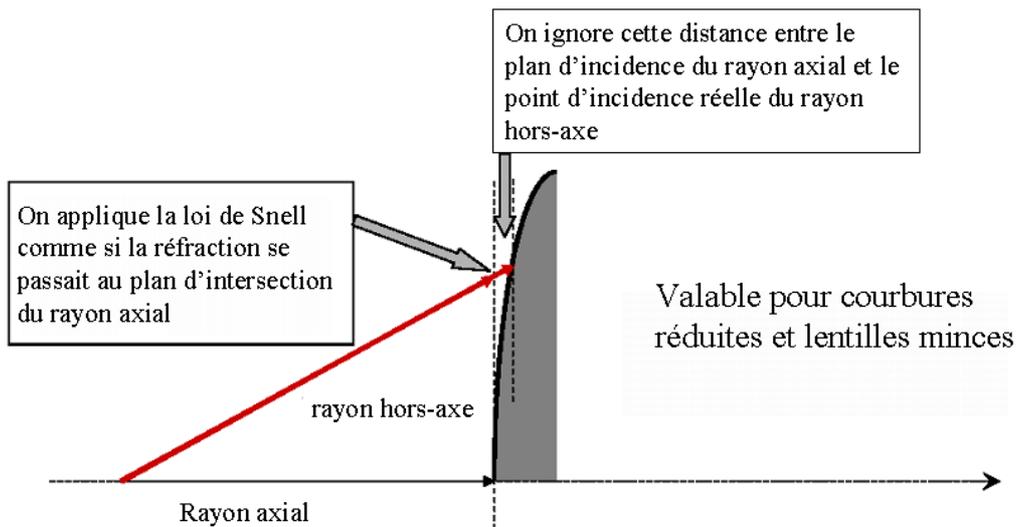


Figure 6-1 Les hypothèses du calcul paraxial des lentilles.

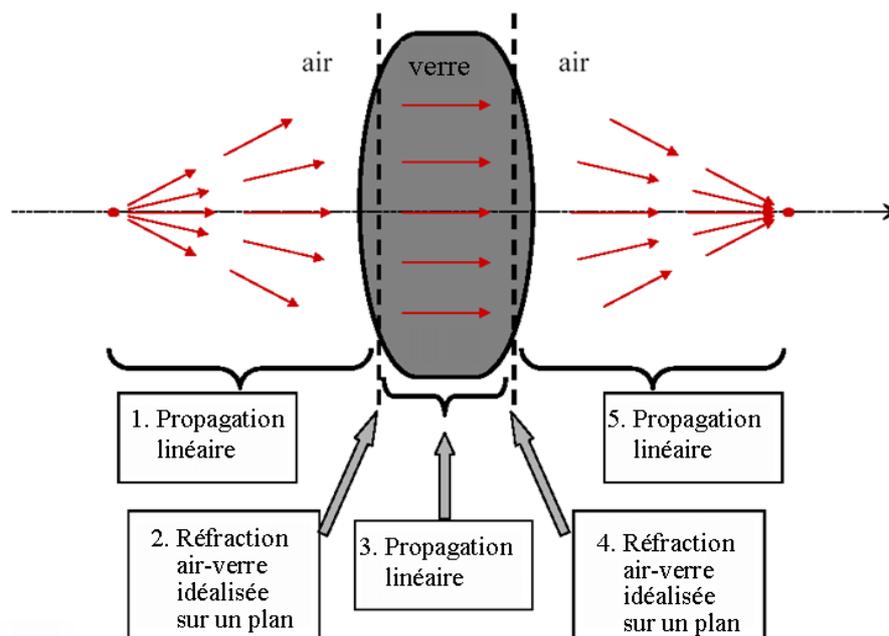
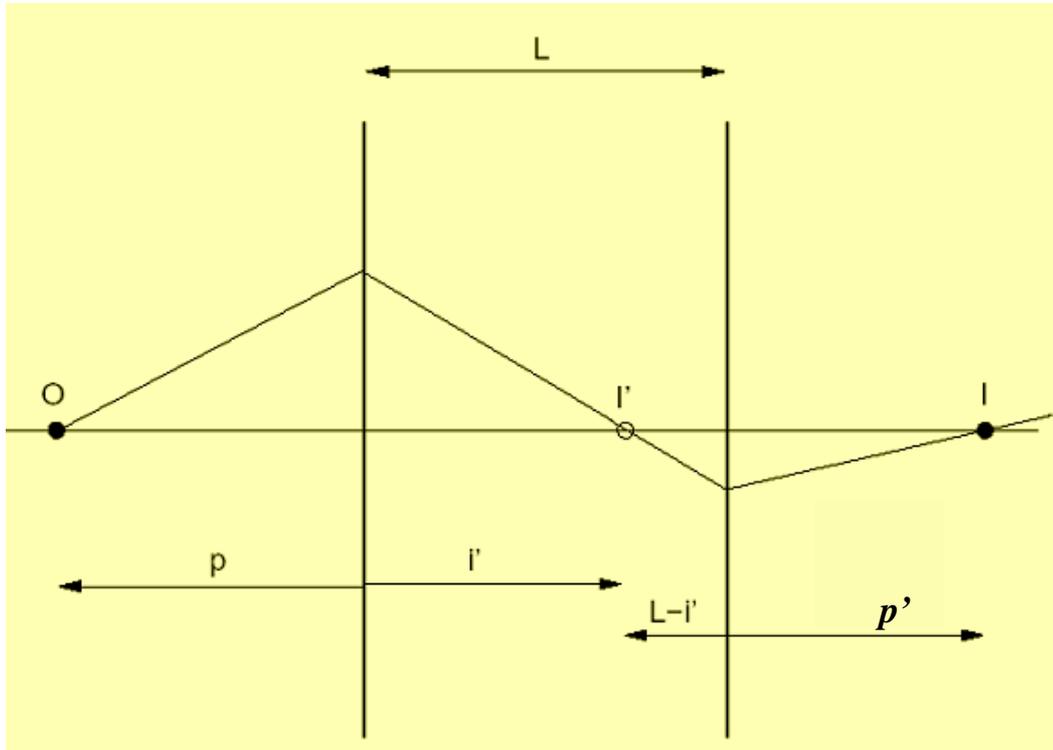


Figure 6-2 Procédure pour le tracé des rayons et le calcul d'une lentille par l'approximation paraxiale.

### 6.2.2 Calcul de la position de l'image par une lentille mince

Calculons la position  $p'$  de l'image d'un point situé à la position  $p$  devant la lentille.

Dans une lentille on a donc deux réfractions consécutives, de l'air vers le verre, et du verre vers l'air. La figure suivante montre le processus.



Appliquons l'équation (5.1) à la première réfraction

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (6.1)$$

Où  $r_1$  est le rayon de courbure de la première surface de la lentille et  $i'$  la position de l'image intermédiaire. L'image formée après la première réfraction est à son tour l'objet de la deuxième réfraction, et se trouve à une distance, mesuré à partir de la deuxième surface de

$$p' = L - i'$$

Appliquons donc l'équation (5.1) à la deuxième surface réfraction

$$\frac{n_2}{L - i'} + \frac{n_1}{p'} = \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad (6.2)$$

Faisons maintenant l'approximation d'une lentille mince ( $L = 0$ ) et ceci devient

$$-\frac{n_2}{i'} + \frac{n_1}{p'} = \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad (6.3)$$

En additionnant les équations (6.1) et (6.3) on a

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.4)$$

Presque toujours le milieu extérieur est l'air, ainsi avec  $n_1 \approx 1$  et en posant  $n_2 = n$ , on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.5)$$

### 6.3 FOYERS OBJET ET IMAGE ET DISTANCE FOCALE POUR UNE LENTILLE MINCE

Rappelons les définitions déjà introduite pour le dioptre sphérique:

- On appelle **foyer image**  $F_i$  l'image d'un objet situé à l'infini: c'est donc le point où focalisent des rayons qui se propagent parallèlement à l'axe optique.
- On appelle **foyer objet**  $F_o$  le point dont l'image est située à l'infini: les rayons issus de ce point se propagent - après traversée de la lentille - parallèlement à l'axe optique.

Si on pose respectivement  $p$  et  $p'$  égal à infini, l'équation (6.5) montre que pour une lentille mince **les deux distances focales image et objet ont la même valeur**, définie par

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.6)$$

Et on a ainsi la distance focale de la lentille mince

$$f = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (6.7)$$

L'inverse de la focale (tel que défini par l'équation (6.6) est appelée **vergence** et a unités  $[m^{-1}]$  ou [dioptries].

### 6.4 L'EQUATION DE LA LENTILLE MINCE (FORMULE DE GAUSS)

Si on pose  $f$  défini par (6.6) dans l'équation (6.5) on obtient une expression très simple pour localiser l'image formée par une **lentille mince**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (6.8)$$

## 6.5 CONVENTIONS DE SIGNE

- La focale  $f$  est **positive** pour une lentille convergente, **négative** pour une lentille divergente.
- $p$  est positif si l'objet est réel, négatif s'il est virtuel.
- $p'$  est positif si l'image est réelle, négatif si elle est virtuelle.
- $r_1$  et  $r_2$ , les rayons de courbure des faces sphériques sont comptés positivement si le centre de courbure est du côté émergent du faisceau, et négativement dans le cas contraire. Dans le cas de la lentille biconvexe, on a  $r_1$  positif et  $r_2$  négatif.

## 6.6 LENTILLES CONVERGENTES ET DIVERGENTES

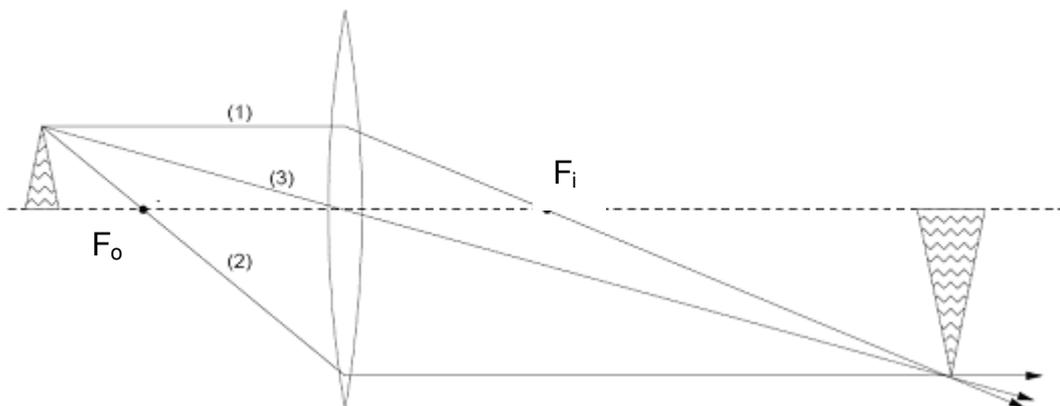
Si la distance focale est positive, l'image d'un objet situé à l'infini devant la lentille se trouve au point focal après la lentille. Une telle lentille est dite **convergente**.

Au contraire si la distance focale est négative, les rayons venant d'un objet à l'infini divergent en passant par la lentille. A un observateur situé derrière la lentille, ces rayons apparaissent provenir d'un point situé quelque part devant la lentille. Une telle lentille est dite **divergente**.

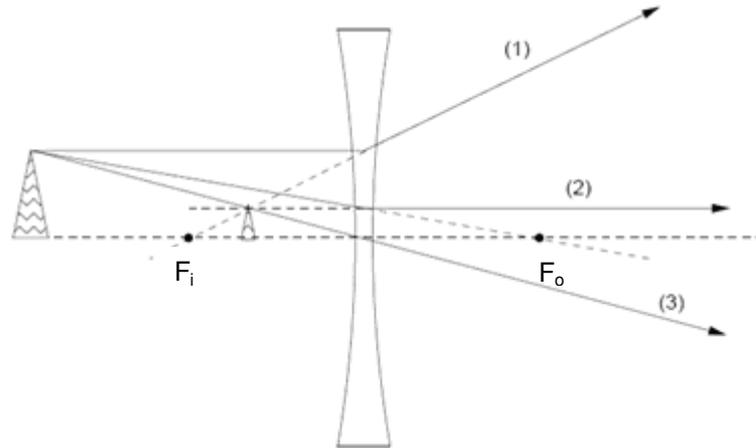
## 6.7 CONSTRUCTIONS OPTIQUES ET IMAGES RÉELLES ET VIRTUELLES

Pour effectuer des constructions sur un schéma optique, on considère 3 rayons particuliers:

1. Le rayon parallèle à l'axe avant la lentille est dévié vers le foyer image.
2. Le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié (si le milieu est le même de chaque côté de la lentille);
3. le rayon sortant de l'objet et qui passe par le foyer objet devient parallèle à l'axe après la lentille.



Construction des rayons pour une lentille convergente. L'image est réelle et peut être projetée sur un écran.

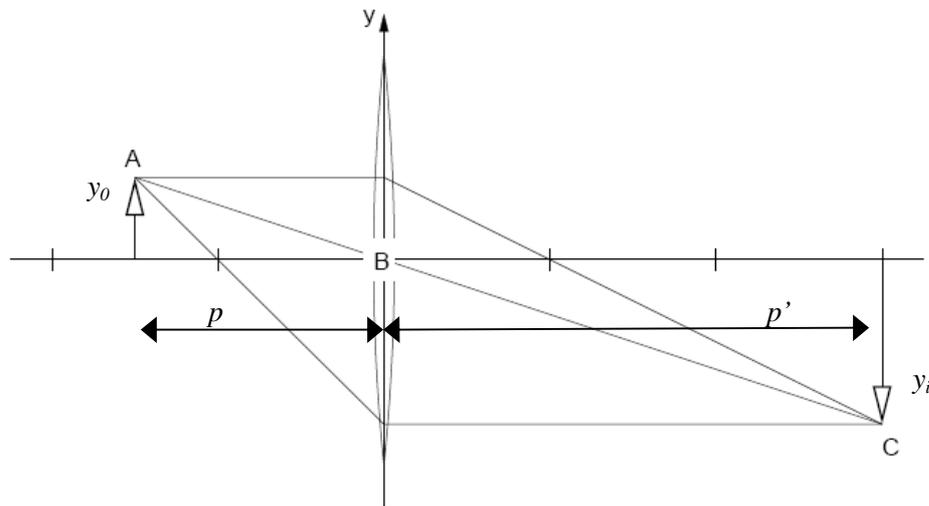


Construction des rayons pour une lentille divergente.

Ici l'image est formée non pas à l'intersection des rayons émergent de la lentille, mais à celle de leurs prolongations vers l'arrière. L'image est donc virtuelle et ne peut pas être projetée sur un écran.

### 6.8 GRANDISSEMENT LATÉRAL

On appelle **grandissement latéral** (ou simplement grandissement) le rapport entre la taille de l'image et la taille de l'objet. Ce rapport est négatif si l'image est renversée.



Faisant référence à la figure ci-dessus le grandissement latéral est donc

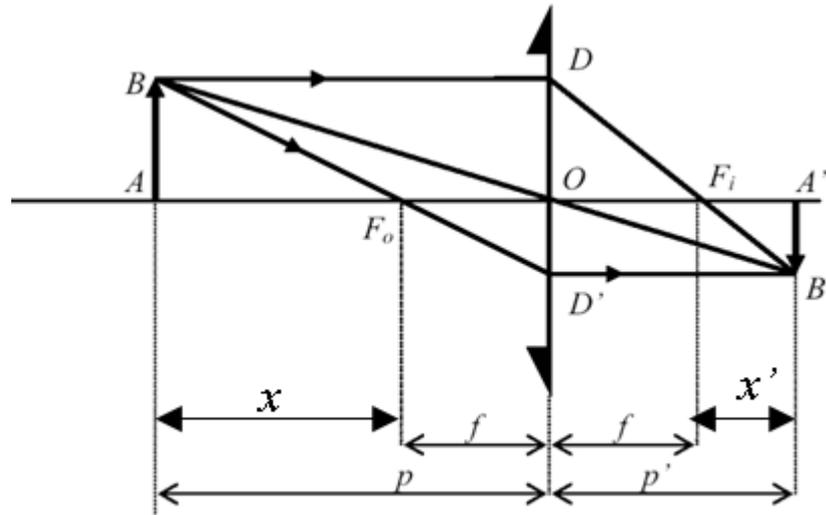
$$G = \frac{y_i}{y_0}$$

Par la même figure il est aussi évident que

$$G = -\frac{p'}{p} \quad (6.9)$$

## 6.9 FORMULE DE NEWTON

Repérons la position de l'objet par rapport au foyer objet et celle de l'image par rapport au foyer image.



Soit  $z$  la distance de l'objet au foyer objet, positive si l'objet est placé devant le foyer objet:

$$z = AF_o = p - f$$

Soit  $z'$  la distance de l'image au foyer image, positive si l'image se trouve après le foyer image:

$$z' = A'F_i = p' - f$$

Multiplions:

$$zz' = (p - f)(p' - f) = pp' - pf - p'f + f^2$$

Compte tenu de la relation (6.8) on obtient la formule de Newton (pour les lentilles)

$$z \cdot z' = f^2 \quad (6.10)$$

## 6.10 EXERCICES

1. A quelle distance d'une lentille convergente de 20 cm de focale faut-il placer une bougie pour en obtenir une image réelle 4 fois plus grande ?
2. On place une lentille de 9 cm de distance focale entre un objet et un écran distant de 1 m. Montrer qu'il existe deux positions de la lentille pour obtenir une image nette sur l'écran. Quel est le grandissement dans chaque cas ?
3. Un objet lumineux est situé sur l'axe d'une lentille convergente à 16 cm de celle-ci. Si on éloigne l'objet de 2 cm, l'image se déplace de 12 cm. Quelle est la focale de lentille ?  
**Rép.:** 12 cm pour une image réelle; 28,8 cm pour une image virtuelle.
4. Une lentille biconvexe de rayon de courbure 10 et 15 cm est taillée dans un verre d'indice 1,6. Quelle est sa distance focale dans l'air ? Et si elle est plongée dans l'eau ?  
**Rép.:** 10 cm, 30 cm dans l'eau.
5. Soit une lentille divergente de focale  $f = -20$  cm. Tracer la marche des rayons dans les cas suivants:
  - a) Objet réel à 30 cm de la lentille
  - b) Objet réel à 10 cm de la lentille
  - c) Objet virtuel à 30 cm de la lentille (c.à.d. derrière la lentille)
  - d) Objet virtuel à 10 cm de la lentilleVérifier chaque fois le résultat par calcul.
6. Calculer la vergence d'un ménisque divergent, d'indice 1,5 et dont les rayons de courbures des faces valent 20 et 30 cm. **Rép.:** -0,83 dioptries.

## 7. ASSOCIATIONS DE LENTILLES MINCES

Rappelons tout d'abord que la **lentille mince** reste un modèle théorique. En effet, aucune lentille n'a une épaisseur nulle. Cependant, la plupart des lentilles simples dont l'épaisseur est petite devant le diamètre peuvent être appréhendées comme telles. Presque toutes les lunettes sont de type «lentille mince». Les lentilles de petits diamètres rentrent également dans cette catégorie, pourvu que leur rayon de courbure soit suffisamment grand. Les lentilles de cette sorte ont généralement une grande distance focale en comparaison de laquelle leur épaisseur est très petite.

Finalement, de nombreuses lentilles utilisées couramment peuvent être considérées comme des lentilles minces. Nous allons maintenant exprimer les relations applicables aux associations de lentilles minces, suivant une approche simplifiée.

### 7.1 CONSTRUCTION OPTIQUE

Considérons ici deux lentilles minces convergentes  $L_1$  et  $L_2$  séparées par une distance  $d$ , inférieure à l'une ou l'autre des deux distances focales (figure ici-bas). L'image finale peut être déduite graphiquement avec la méthode suivante.

Sans tenir compte de  $L_2$  pour l'instant, construisons l'image formée exclusivement par  $L_1$  en utilisant les rayons 2 et 3. Comme on a déjà vu, ils passent respectivement par les foyers objet  $F_{o1}$  et le foyer image  $F_{i1}$  de la lentille  $L_1$ . Ces deux rayons déterminent l'extrémité de l'image intermédiaire  $P_1'$ . De plus, comme l'objet de départ appartient à un plan parallèle à la lentille, la perpendiculaire menée depuis le bord de l'objet à l'axe optique détermine la localisation de la base de l'image.

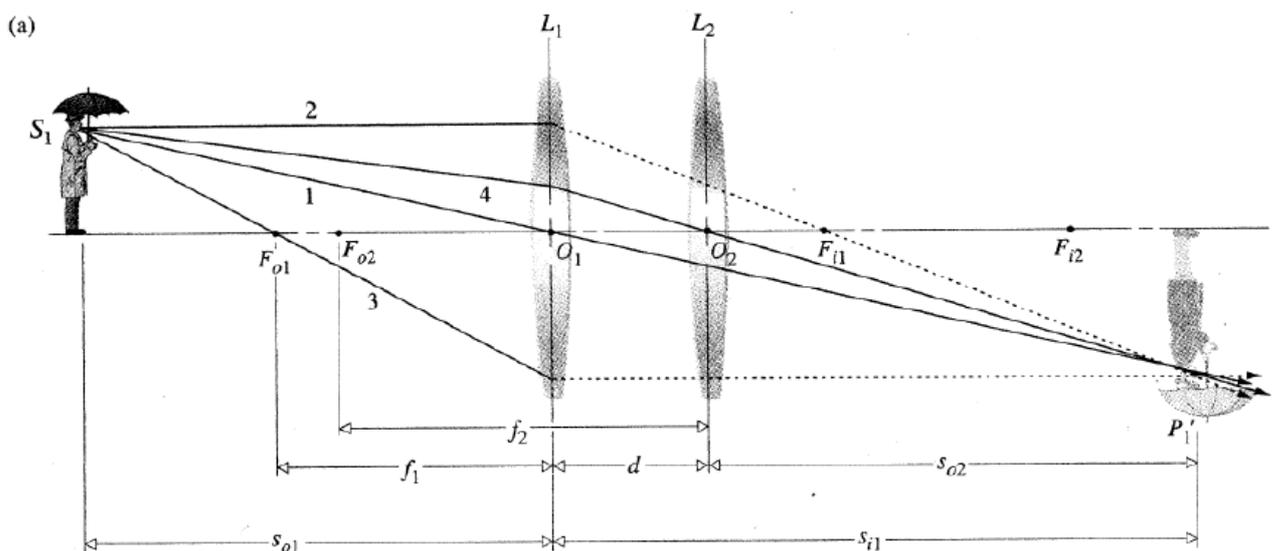


Figure 7-1 Construction de l'image intermédiaire par la lentille  $L_1$

On trace ensuite le rayon 4 reliant le centre de la deuxième lentille  $O_2$  à  $P_1'$ . On prolonge le rayon en arrière jusqu'à l'objet de départ. De ce fait, la prise en compte de  $L_2$  n'a pas d'effet sur ce rayon.

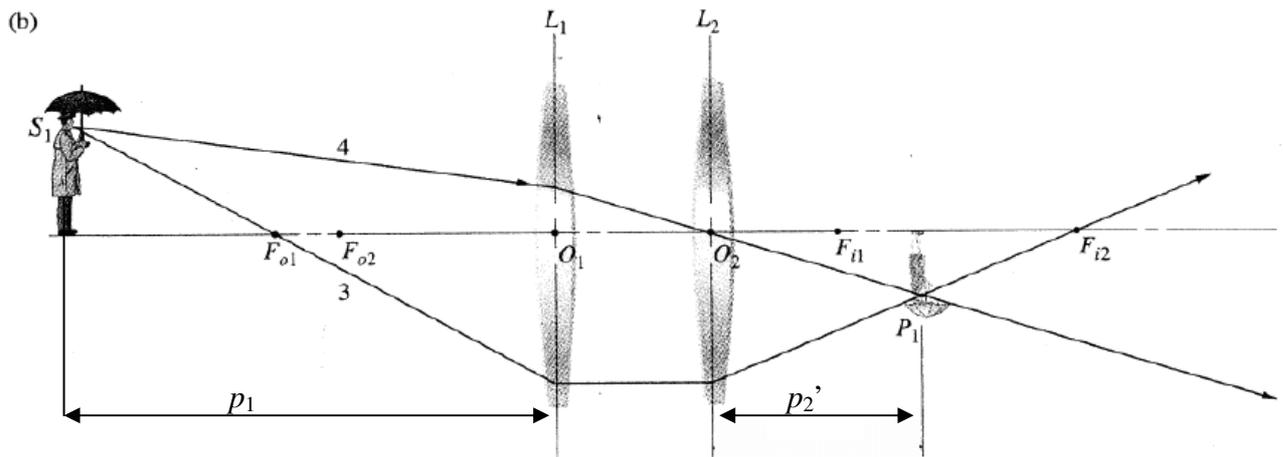


Figure 7-2 Construction de l'image finale

D'autre part, le rayon 3 arrive perpendiculaire à  $L_2$  et passe donc par son foyer image  $F_2$ . L'intersection des rayons 3 et 4 fixe en définitive la position de l'image finale. Dans le cas de la figure, celle-ci est réelle, réduite et inversée. Lorsque les deux lentilles sont proches l'une de l'autre, on voit finalement que l'insertion de  $L_2$  revient à ajouter de la convergence ( $f_2 > 0$ ) ou de la divergence ( $f_2 < 0$ ) au faisceau de rayons émergent de  $L_1$  (ci-haut).

Un autre cas d'association de lentilles est présenté à la figure suivante. Les deux lentilles sont cette fois espacées d'une distance supérieure à leurs distances focales. La méthode graphique est identique à celle développée dans le premier cas.

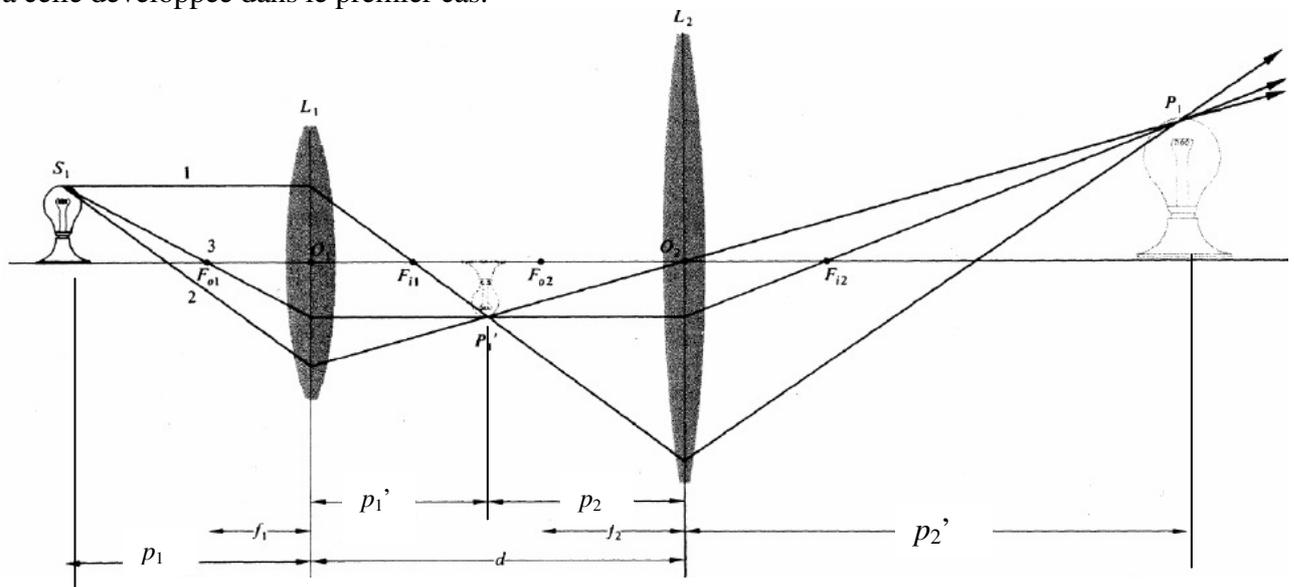


Figure 7-3 Construction de des rayons pour une association de deux lentilles sont cette fois espacées d'une distance supérieure à leurs distances focales.

On trace d'abord les rayons 2 et 3 passant respectivement par  $F_{11}$  et  $F_{01}$ . Ceux-ci permettent de fixer la position de l'image intermédiaire donnée par la seule lentille  $L_1$ . On trace ensuite le rayon 4 entre  $O_2$  et  $P_1'$ . L'intersection du rayon 4, non dévié par  $L_2$ , et du rayon 3 passant par son foyer image permet de déterminer la position de l'image finale. Elle est dans cet exemple réelle, agrandie et droite. Notons d'ailleurs que plus la focale de  $L_2$  est grande, avec tous les autres paramètres constants, plus l'image est agrandie par rapport à l'objet de départ.

## 7.2 CALCUL D'UNE ASSOCIATION DE LENTILLE

Analytiquement, on a pour  $L_1$ :

$$\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1} \quad (7.1)$$

et donc

$$p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} \quad (7.2)$$

Lorsque  $p_1 > f_1$  et  $f_1 > 0$ , cette grandeur est positive et l'image intermédiaire est à la droite de  $L_1$ . D'autre part, la position de l'image de la première lentille par rapport à la deuxième lentille est

$$p_2 = d - p_1' \quad (7.3)$$

donc si  $d < p_1'$ , l'objet est virtuel ( $p_2 < 0$ ) et les rayons qui rencontrent  $L_2$  sont convergents.

En revanche, si  $d > p_1'$ , l'objet est réel pour  $L_2$  et les rayons qui rencontrent  $L_2$  sont divergents (cas de la figure 7.3). De plus, on a:

$$\frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} \quad (7.4)$$

et donc

$$p_2' = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = \frac{(d - p_1') f_2}{d - p_1' - f_2} \quad (7.5)$$

De la même manière, on peut calculer séquentiellement la position de l'image d'un système de lentilles minces, quel que soit leur nombre.

Pour les systèmes à deux lentilles il est néanmoins pratique d'avoir une seule expression, et on obtient ainsi:

$$p_2' = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = \frac{f_2 d - f_2 p_1 f_1}{d - f_2 - \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}} \quad (7.6)$$

$d$  = distance entre les lentilles 1 et 2

$p_1$  = position de l'objet par rapport à la première lentille

$p_1'$  = position de l'image produite par la première lentille

$f_1$  = focale de la première lentille

$p_2$  = position de l'image de la première lentille par rapport à la deuxième lentille

$f_2$  = focale de la deuxième lentille

$p_2'$  = position de l'image de la deuxième lentille

Le grandissement transversal total de la lentille composée est équivalent au produit des grandissements transversaux de chaque lentille simple:

$$G = G_1 \cdot G_2 \quad (7.7)$$

### 7.3 TIRAGE FOCAL

On définit la distance entre le sommet de la première surface d'un système optique et le foyer objet est le **tirage focal objet** du système<sup>12</sup>, dénoté ici *TFO*.

La distance entre le sommet de la dernière lentille et le foyer image du système est le **tirage focal image**, dénoté ici *TFI*.

Par conséquent, si  $p_2' \rightarrow \infty$ ,  $p_2$  se rapproche de  $f_2$ , on constate donc que  $p_1' \rightarrow (d - f_2)$ .

Ainsi, on obtient cette valeur particulière de  $p_1$  (voir Figure 7-2 et

Figure 7-3) qui est le tirage focal objet *TFO*:

$$TFO = \frac{f_1(d - f_2)}{d - f_1 - f_2} \quad (7.8)$$

Identiquement, si on pose  $p_1 \rightarrow \infty$  et dans l'équation (5.33),  $(p_1 - f_1) \rightarrow p_1$  Et donc  $p_2$  correspond alors au tirage optique image *TFI* on a:

$$TFI = \frac{f_2(d - f_1)}{d - f_1 - f_2} \quad (7.9)$$

### 7.4 LENTILLES ACCOLÉES

Notons que si  $d = 0$ , les lentilles sont mises en contact. C'est le cas de nombreuses lentilles composées (dites **accolées**) comme les doublets achromatiques.

Dans ce cas particulier on a:

$$TFI = TFO = \frac{f_2 f_1}{f_2 + f_1}$$

Les deux tirages optiques objet et image étant égaux, le système de deux lentilles équivaut à une lentille simple équivalente qui a une distance focale effective  $f$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (7.10)$$

Cette formule est généralisable pour  $N$  lentilles minces en contact:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_N} \quad (7.11)$$

---

<sup>12</sup> A ne pas confondre avec la distance focale d'un système de plusieurs lentilles, qui sera introduit ultérieurement.

## 7.5 EXERCICE

On a le système optique suivant:

1. Lentille divergente de focale  $-250$  mm
2. Lentille convergente de focale  $150$  mm placée  $150$  mm derrière la première lentille.

L'objet est placé  $250$  mm devant la première lentille.

- Où est l'image par rapport à la deuxième lentille ?
- Utilisez la méthode graphique (tracé de rayons) et le calcul.
- Quel est le grandissement ?

Ajoutez encore une troisième lentille convergente de focale  $150$  mm, placée  $150$  mm derrière la deuxième.

- Calculer la position de l'image (par rapport à la troisième lentille) et le grandissement. Comparez avec la méthode graphique.

## 8. MIROIRS

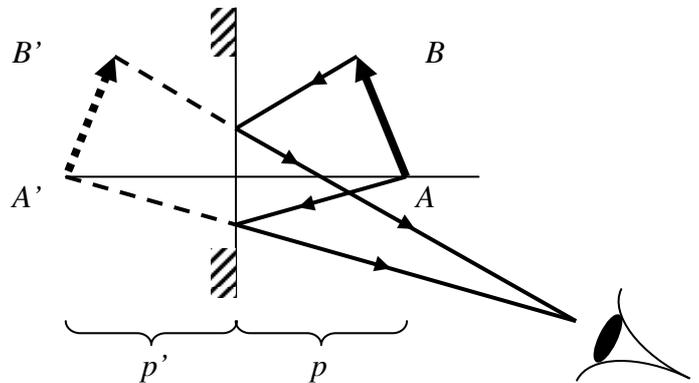
### 8.1 MIROIRS PLANS

En regardant un objet dans un miroir, on voit une image symétrique de cet objet, située derrière le miroir.

La distance de l'objet au miroir est celle du miroir à l'image sont égales:

$$p' = p$$

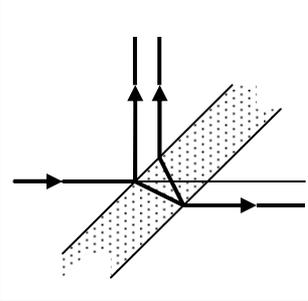
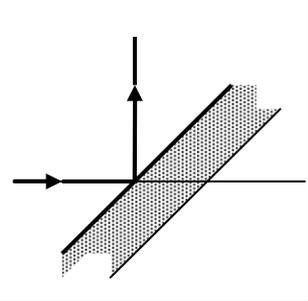
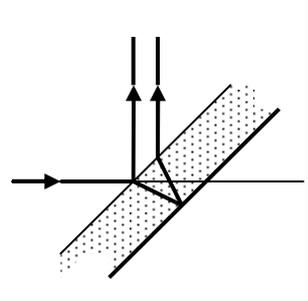
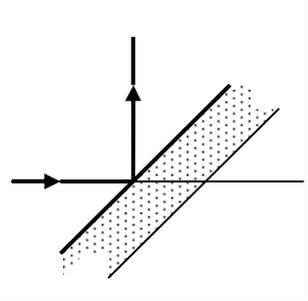
Les images ne sont pas superposables, l'arrière et l'avant étant inversés: c'est ce qui fait que, par exemple, l'image d'une main droite est une main gauche.



La métallisation d'un miroir usuel se fait par un dépôt chimique d'un métal.

Pour les miroirs de télescopes, elle se fait par évaporation sous vide d'un métal (argent, aluminium, or,...). L'épaisseur de la couche est de l'ordre du micromètre.

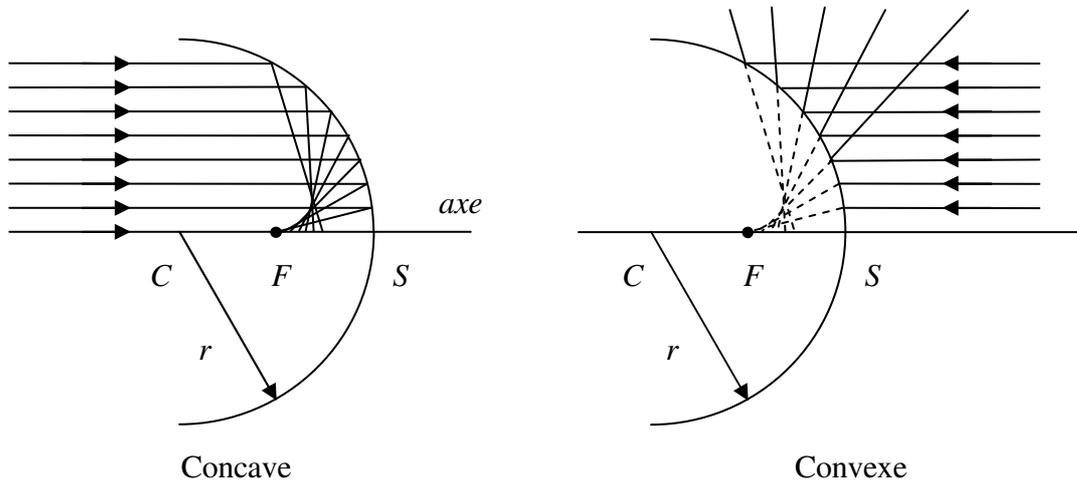
#### Types de miroirs plans

			
Plaque de verre polie	Plaque de métal polie	Verre métallisé (face arrière)	Verre métallisé (face avant)
Facile à usiner			Facile à usiner
Résistant aux agents chimiques		Résistant aux agents chimiques	Surface délicate
Double image	Réflexion parfaite	Double image	Réflexion parfaite
Perte de lumière dans le verre		Perte de lumière dans le verre	
Sans emploi particulier	Eclairage	Glaces, miroirs	Miroirs optiques

## 8.2 MIROIRS SPHÉRIQUES

Un miroir sphérique est une portion de sphère, en général une calotte, réfléchissante.

On distingue les **miroirs concaves** qui ont tendance à faire converger des rayons parallèles et les **miroirs convexes** qui les font diverger.



Les rayons d'un faisceau étendu ne convergent pas tous en un même point.

En revanche **les rayons proches de l'axe** convergent, avec une bonne approximation en un point  $F$ , appelé **foyer**, et situé sur l'axe à **mi-distance** entre le **vertex** ( $S$ ) du miroir et son **centre de courbure** ( $C$ ).

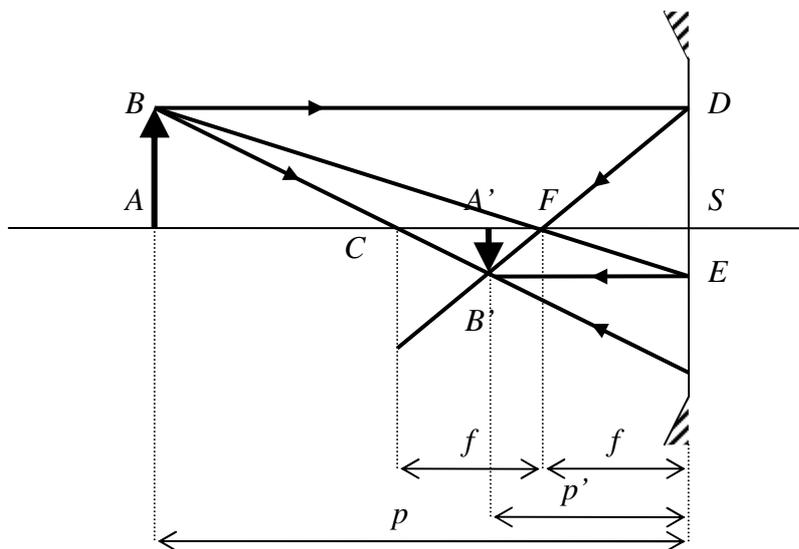
<p>Selon la loi de la réflexion on a:</p> <p>angle <math>(DPC) = i = \text{angle}(CPF) = r</math></p> <p>donc: angle <math>(EPF) = 2i</math></p> $\tan i = \frac{DC}{DP} = \frac{y}{DP}; \quad \tan 2i = \frac{EF}{EP} = \frac{y}{EP}$ <p>Et pour des <b>petits angles</b>: <math>i \approx \frac{y}{r}; \quad 2i \approx \frac{y}{FS}</math></p> <p>La distance <math>FS \approx \frac{r}{2}</math> est appelée</p> <p><b>distance focale</b> du miroir.</p>	<p>Le diagramme géométrique montre un miroir sphérique concave avec son centre de courbure C et son sommet S sur l'axe principal. Un point P est choisi sur la surface du miroir. Une droite horizontale passe par P, avec des points D et E sur l'axe principal. D est le pied de la perpendiculaire de P sur l'axe principal passant par C. E est le pied de la perpendiculaire de P sur l'axe principal passant par F, le foyer. La distance CP est notée r. La distance DP est notée y. Les angles DPC et CPF sont égaux à i. L'angle EPF est noté 2i.</p>
---	--

### 8.3 IMAGE D'UN OBJET PAR UN MIROIR CONCAVE

Soit un miroir concave situé en  $S$ .

Désignons par  $C$  son centre courbure et par  $F$  son foyer.

Soit un objet  $AB$  situé entre  $C$  et l'infini. La droite  $AS$  coïncide avec l'axe du miroir.



Pour trouver l'image de  $AB$ , on peut procéder comme suit:

- Un rayon issu de  $B$  et passant par le centre  $C$  donne un rayon réfléchi passant aussi par le centre;
- Un rayon issu de  $B$  parallèle à l'axe donne un rayon réfléchi passant par le foyer;
- Un rayon issu de  $B$  passant par le foyer  $F$  est ensuite réfléchi parallèle à l'axe.

Ces trois rayons réfléchis se coupent en un point  $B'$ .

Ainsi  $A'B'$  est l'image de  $AB$ . Clairement deux rayons suffisent pour construire le point image.

Soit  $p$  la distance de l'objet au miroir,  $p'$  la distance du miroir à l'image et  $f$  la distance focale.

Les triangles  $BFD$  et  $B'FE$  sont semblables, ce qui signifie que

$$\frac{p-f}{f} = \frac{f}{p'-f}$$

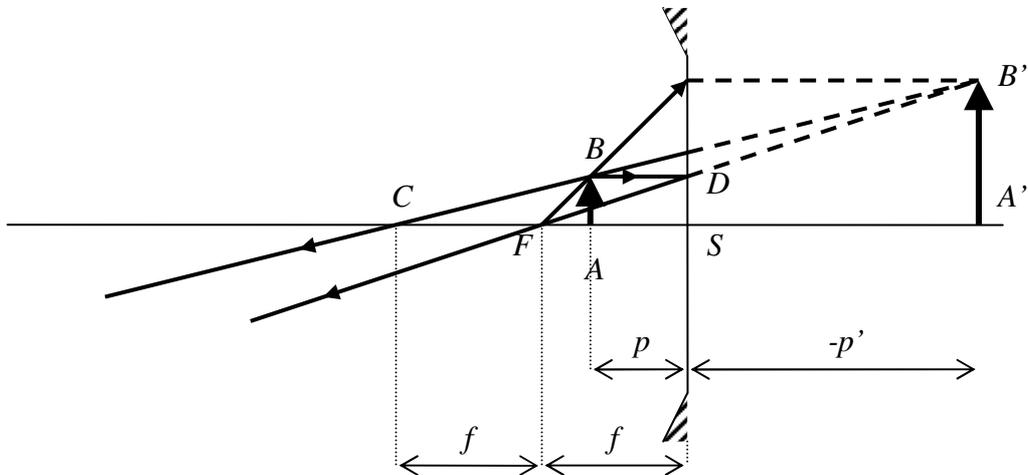
Et après quelques manipulations on obtient la formule des miroirs sphériques

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}} \quad (8.1)$$

Ainsi, lorsque l'objet est situé entre  $C$  et l'infini, l'image se trouve entre  $C$  et  $F$ .

Réciproquement, par le principe du retour inverse, lorsque l'objet est situé entre  $C$  et  $F$ , l'image se trouve entre  $C$  et l'infini. Dans ces deux cas l'image est réelle.

Voyons maintenant le cas où l'objet est situé entre  $F$  et le miroir.



Les calculs sont identiques au cas précédent si l'on prend soin de compter *négativement* la distance du miroir à l'image. Dans ce cas l'image est **virtuelle**.

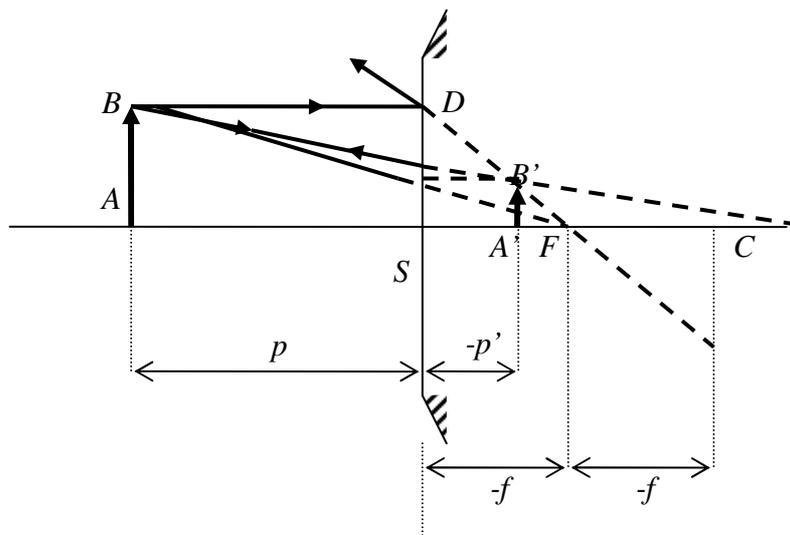
Un objet situé entre  $F$  et le miroir donne une image virtuelle située derrière le miroir.

Une image réelle peut être visualisée sur un écran. Ce n'est pas le cas d'une image virtuelle; en revanche on peut la voir en regardant dans le miroir.

#### 8.4 IMAGE D'UN OBJET PAR UN MIROIR CONVEXE

Soit un miroir convexe situé en  $S$ . Désignons par  $C$  son centre courbure et par  $F$  son foyer.

Soit un objet  $AB$  situé du côté réfléchissant du miroir. La droite  $AS$  coïncide avec l'axe du miroir.



Pour trouver l'image de  $AB$ , la procédure est analogue à celle décrite pour les miroirs concaves:

- Un rayon issu de  $B$  et se dirigeant vers le centre  $C$  donne un rayon réfléchi semblant provenir du centre;
- Un rayon issu de  $B$  parallèle à l'axe donne un rayon réfléchi semblant provenir du foyer;
- Un rayon issu de  $B$  vers le foyer  $F$  est réfléchi parallèle à l'axe.

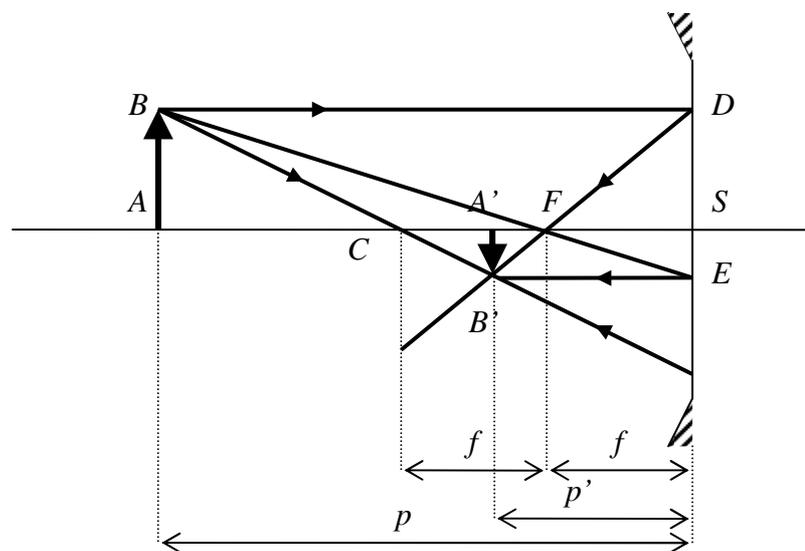
Les prolongements de ces rayons réfléchis se coupent en un point  $B'$ .

Ainsi  $A'B'$  est l'image virtuelle de  $AB$ .

Le raisonnement et les calculs sont semblables à ceux du miroir concave. Si l'on compte *négativement* la distance focale et *négativement* la distance du miroir à l'image, on obtient la même formule (8.1).

## 8.5 GRANDISSEMENT LATÉRAL

Comme pour les lentilles, on appelle grandissement latéral le rapport entre la taille de l'image et la taille de l'objet. Ce rapport est négatif si l'image est renversée.



Faisant référence à la figure ci-dessus, et considérant les triangles semblables FDS et FA'B', le grandissement latéral est donc

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{p'-f}{f}$$

Tenant compte de la formule des miroirs (8.1), on obtient:

$$G = 1 - \frac{p'}{f} = 1 - p' \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) = -\frac{p'}{p} \quad (8.2)$$

## 8.6 CONVENTIONS DE SIGNES POUR LES MIROIRS

- La focale  $f$  est positive pour un miroir concave, négative pour un miroir convexe.
- $p$  (position de l'objet par rapport au miroir) est positif si l'objet est réel, négatif s'il est virtuel.
- $p'$  (position de l'image) est positif si l'image est réelle, négatif si elle est virtuelle.
- $r$ , le rayon de courbure est positif si le miroir est convexe, et négatif dans le cas contraire.

## 8.7 FORMULE DE NEWTON POUR LES MIROIRS

Soit  $z$  la distance de l'objet au foyer:  $z = AF = p - f$

Soit  $z'$  la distance de l'image au foyer:  $z' = A'F = p' - f$

Multiplions:

$$zz' = (p - f)(p' - f) = pp' - pf - p'f + f^2$$

Par la géométrie (voir par exemple la figure à la page précédente) on peut montrer que

$$pp' = pf + p'f$$

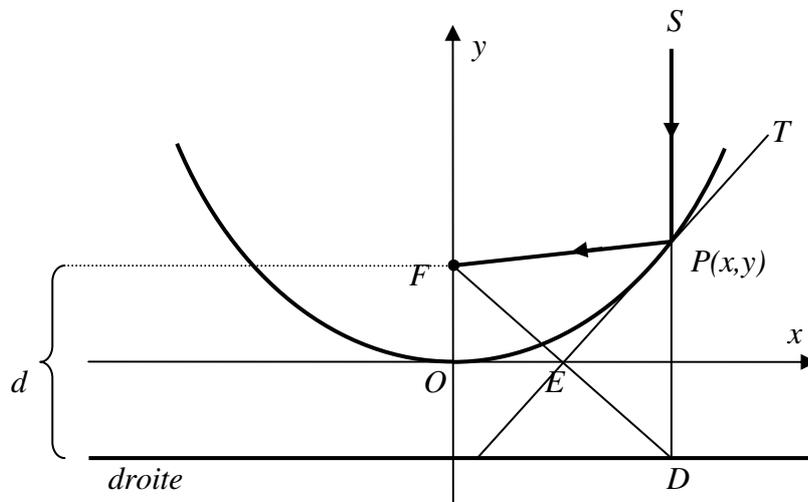
Et on obtient la formule de Newton pour les miroirs

$$z \cdot z' = f^2 \quad (8.3)$$

## 8.8 LES MIROIRS PARABOLIQUES

Nous avons vu qu'un miroir sphérique ne focalise qu'approximativement un faisceau parallèle, et que l'approximation est d'autant plus mauvaise que l'ouverture du miroir est grande.

En fait la surface réfléchissante qui focalise parfaitement un faisceau parallèle est un paraboloïde. Les miroirs paraboliques sont pour cette raison abondamment utilisés en pratique (par exemple: réflecteur de projecteur ou de phare d'automobile, télescope). En revanche les miroirs paraboliques sont plus difficiles à usiner que les miroirs sphériques.



La parabole est le lieu des points équidistants d'un point et d'une droite.

Soit une droite et un point  $F$  situé à une distance  $d$  de cette droite. Choisissons un repère  $Oxy$  de telle sorte que  $Ox$  soit parallèle à la droite et que les coordonnées du point  $F$  soient  $(0, d/2)$ .

Un point  $P$  appartient à la parabole si la distance  $FP$  est égale à la distance à la droite, c'est-à-dire à la longueur du segment  $PD$ .

On a donc

$$FP = PD$$

$$\sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} = y + d/2$$

Élevons au carré et simplifions:

$$x^2 + (y - d/2)^2 = (y + d/2)^2$$

$$x^2 + y^2 - yd + d^2/4 = y^2 + yd + d^2/4$$

$$x^2 = 2yd$$

On obtient ainsi l'équation d'une parabole d'axe  $Oy$

$$y = \frac{x^2}{2d} \quad (7.4)$$

Calculons la pente de la tangente à la parabole au point  $P(x,y)$ . Pour cela, il suffit de dériver l'équation (5.7), d'où

$$y' = \frac{x}{d}.$$

La tangente en  $P$  est perpendiculaire au segment  $FD$ , car la pente de  $FD$  est égale à  $-\frac{d}{x}$ .

La tangente en  $P$  est donc la hauteur du triangle  $FPD$  abaissée depuis  $P$ . Comme ce triangle est isocèle ( $FP = PD$ ), la hauteur  $PE$  est également la bissectrice de l'angle  $FPD$ . Donc l'angle  $FPE$  est égal à l'angle  $EPD$ , qui est aussi égal à l'angle  $SPT$ .

Un rayon  $SP$  parallèle à  $Oy$  et incident en  $P$  sera donc renvoyé en  $F$ .

Pour cette raison  $F$  est appelé le **foyer** de la parabole.

Lorsqu'on fait tourner la parabole autour de son axe  $Oy$ , on obtient un parabolôïde de révolution. Un miroir ayant la forme d'une portion de cette surface a donc la propriété de réfléchir les rayons d'un faisceau parallèle à l'axe  $Oy$  vers son foyer.

De plus, tous les rayons du faisceau passant simultanément dans un plan perpendiculaire à l'axe du miroir parabolique arrivent après réflexion simultanément au foyer. Une onde plane parallèle à  $Oy$  est réfléchiée sous la forme d'une onde sphérique vers le foyer.

## 8.9 EXERCICES

- Une personne se regarde dans un miroir plan situé à 2 m. Elle a une taille de 180 cm et les yeux à 15 cm au-dessous du sommet de son chapeau. Quelles doivent être la hauteur et la position du miroir pour que la personne voie complètement son image ?
- Un miroir sphérique concave donne une image réelle réduite d'un facteur 5 d'un objet placé à 3 m du sommet. Calculer le rayon de courbure du miroir. **Rép:**  $R = 1$  m
- Soit un miroir sphérique concave de courbure  $R = 50$  cm. Calculer la position et la taille des images dans le cas suivants:
  - Objet réel de 1 cm à 60 cm;
  - Objet réel de 1 cm à 10 cm;
  - Objet virtuel de 1 cm situé à 5 cm derrière le miroir.
- Approximation d'un miroir parabolique par un miroir sphérique. Soit une parabole d'axe  $Oy$  ayant son foyer en  $(0, f)$  et un cercle de rayon  $2f$  ayant son centre en  $(0, 2f)$ .
  - Exprimer mathématiquement la différence entre ces deux courbes en fonction de  $x$ .
  - En fonction de  $f$ , quel est le rayon d'ouverture maximal ( $x$ ) si l'on tolère une erreur de  $2\lambda$  pour une longueur d'onde  $\lambda = 500 \mu\text{m}$  ?
- On voudrait concevoir un rétroviseur de voiture de grandissement  $1/4$  pour les objets situés à 15 m devant le miroir. Faut-il utiliser un miroir plan, un miroir convexe ou un miroir concave ? Si c'est un miroir sphérique quel doit être son rayon de courbure ?

**Rép.** Miroir convexe de 10 m de rayon de courbure.

## 9. INTRODUCTION AUX ABERRATIONS DES LENTILLES

Dans la pratique, les lentilles ne sont pas parfaites. Leurs défaut de stigmatisme sont appelés aberrations. On distingue les aberrations géométriques (ou monochromatiques) qui dérivent d'un écart entre la surface d'onde paraxiale et la surface d'onde réelle, et l'aberration chromatique, dont les effets sont dus aux variations d'indice des matériaux optiques avec la longueur d'onde.

### 9.1 ABERRATION DE SPHÉRICITÉ

L'aberration sphérique désigne une aberration dont l'une des conséquences est la disparition du foyer. Rappelons que l'approximation de Gauss n'est valable que pour des rayons proches de l'axe optique et quasi-parallèles à celui-ci.

Dès que le diamètre (ouverture) de la lentille est significatif en rapport au rayon de courbure, les rayons provenant du bord et du centre de l'optique ne se focalisent plus au même point. On observe alors une caustique de focalisation, dans laquelle le point image attendu sera remplacé par un halo plus ou moins flou. On définit donc trois foyers principalement:

- le foyer paraxial: il est défini par l'approximation de l'optique géométrique
- le meilleur foyer: il correspond à l'endroit où la tache est la moins diffuse
- le foyer marginal: c'est celui correspondant à l'intersection des rayons marginaux (i.e. ceux qui passent par les bords de la pupille du système optique)

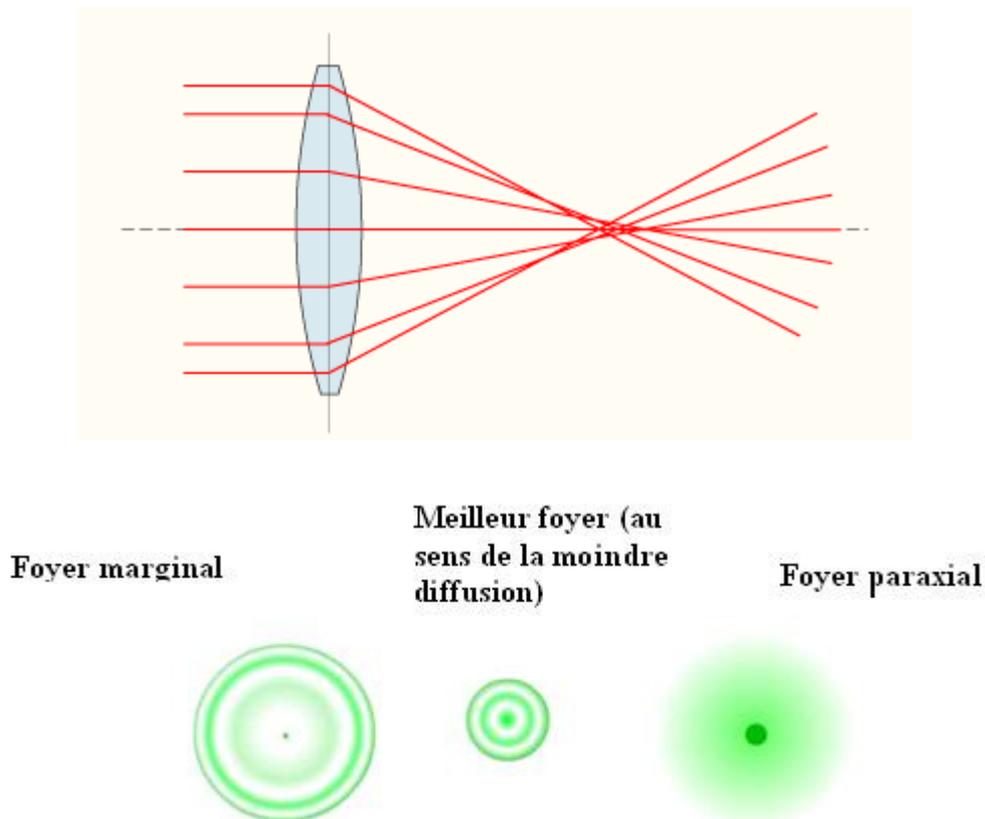


Figure 9-1 Illustration de l'aberration sphérique

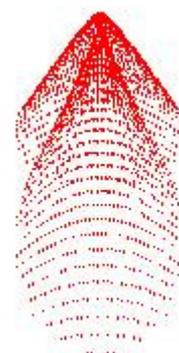
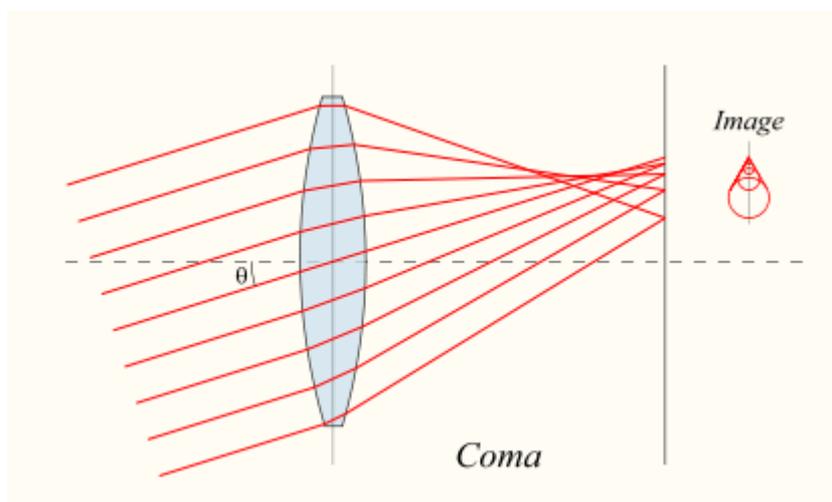
Pour une lentille sphérique, les rayons se trouvant au bord de la lentille focalisent à une place légèrement différente des rayons se trouvant au centre: l'image d'un point est donc une tache floue. Ceci est dû au fait qu'une surface sphérique n'est pas la forme idéale pour réaliser une lentille. Il s'agit cependant de la forme la plus simple à polir, et elle reste très souvent utilisée. L'aberration sphérique peut être minimisée en limitant la largeur du faisceau par un diaphragme.

Pour l'éliminer totalement on utilise des lentilles non-sphériques que l'on nomme **lentilles asphériques**, utilisables pour des applications particulières bien déterminées. Ces lentilles sont dans la famille des paraboloïdes qui font converger par définition des rayons parallèles en un point focal.

## 9.2 ABERRATION DE COMA

L'aberration de coma désigne une aberration qui dépend du champ d'une part et de l'ouverture d'autre part (i.e. de la distance du point d'impact des rayons sur la pupille par rapport au centre de celle-ci). Cette aberration est dite "de champ" car elle n'existe pas sur l'axe optique. L'effet de cette aberration est de produire une tache en forme d'aigrette dans un plan d'observation:

Les rayons parallèles qui ne sont pas dans l'axe optique de la lentille ne convergent pas tous en un même point sur le plan focal. Les rayons qui passent sur les bords de la lentille peuvent être focalisés plus loin ou plus près de l'axe optique que ceux passant au centre de la lentille. On parle respectivement de coma positive et de coma négative.



Comme pour l'aberration de sphéricité, il est possible de réduire la coma en choisissant une courbure particulière de la lentille.

### 9.3 ASTIGMATISME

Une lentille optique présente à priori une symétrie axiale. Mais cette symétrie peut ne pas être parfaite, lors de sa fabrication. On constate alors, lors d'essais sur banc, que la distance focale de l'objectif n'est pas constante autour de l'axe optique. En effet, la distance focale dépend de l'indice de réfraction de la lentille et de son rayon de courbure. Dès lors que celui-ci n'est pas parfaitement homogène, la distance focale ne l'est pas non plus.

L'aberration d'**astigmatisme** considère en particulier l'existence de deux focales légèrement différentes correspondant à deux plans orthogonaux, appelés **méridien** (ou **sagittal**) et **tangentiel**.

Prenons le cas d'une lentille qui image un point P nettement éloigné de l'axe. Considérons deux pinceaux de rayons plans respectivement dans les plan méridien (vertical dans la figure) et sagittal. A l'émergence, dans le cas général, ces pinceaux ne convergeront pas en un point, mais ils s'appuieront sur deux focales:

La première est la focale méridienne (ou sagittale) dans le plan de l'axe optique et le point P, qui imagera P en  $S_1$ . La seconde est la focale tangentielle (ou transverse) dans le plan normal au plan précédent qui imagera P en  $T_1$ .

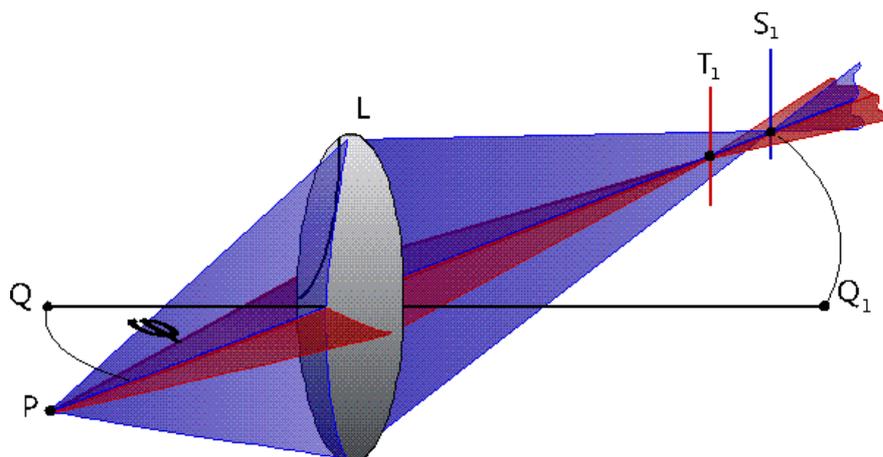
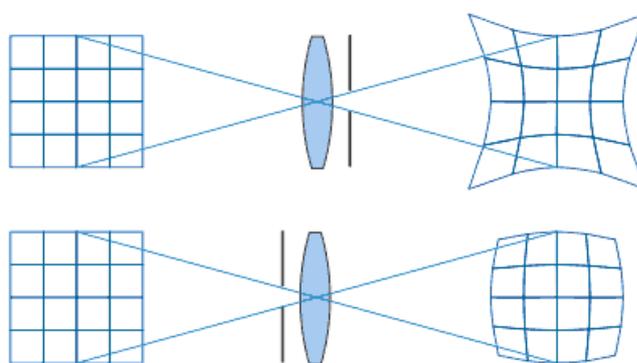


Figure 9-2 Illustration de l'aberration d'astigmatisme. Quelque part entre S et T on aura un **cercle de moindre diffusion**, une « mage » floue du point objet P.

## 9.4 DISTORSION

En optique la distorsion est une aberration géométrique apparaissant quand les conditions menant à l'approximation de Gauss ne sont plus respectées. Notamment, en photographie, la distorsion est un défaut optique de l'objectif qui se traduit par la courbure des lignes droites du sujet photographié.

La distorsion est proportionnelle à  $y^3$  ( $y$  étant la taille de l'image). Cette aberration est donc indépendante de la dimension de la pupille. À la limite, la distorsion existe même si la pupille est réduite à un point. En fait la distorsion n'est pas vraiment une aberration car ici l'image d'un point est un point. Seule la position du point image est modifiée par rapport à celle prévue par l'approximation de Gauss de l'optique géométrique.



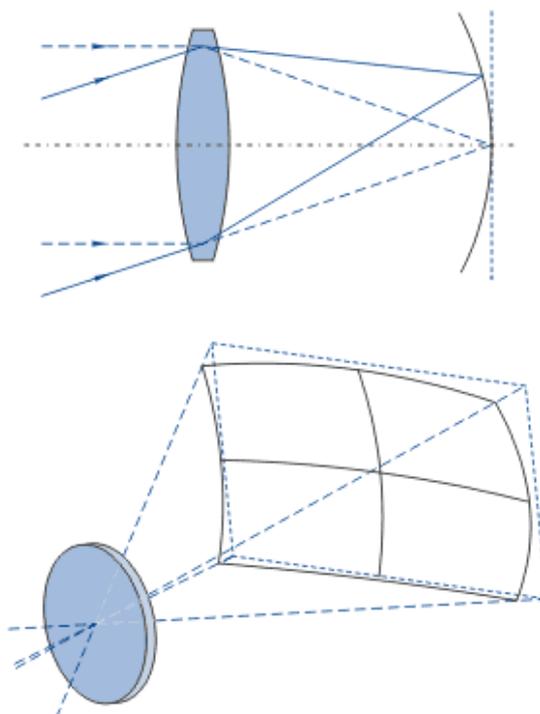
La distorsion peut être de deux types principaux:

1. **Distorsion en croissant:**

L'objectif produit une image plus petite de la partie centrale du sujet. En conséquence, les lignes droites du sujet sont incurvées vers l'intérieur.

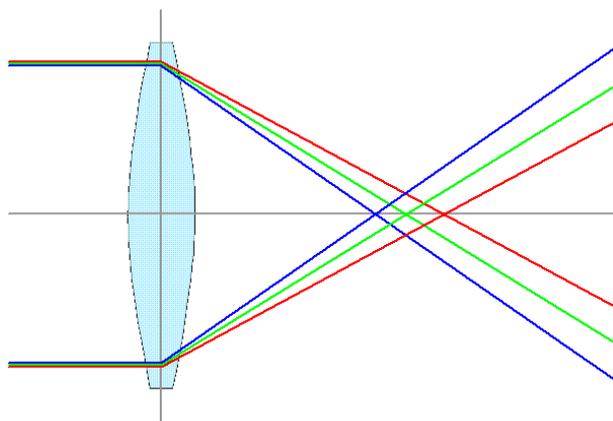
2. **Distorsion en barillet:**

L'objectif produit une image plus grande de la partie centrale du sujet. En conséquence, les lignes droites du sujet sont incurvées vers l'extérieur.



## 9.5 ABERRATION CHROMATIQUE

La cause de cette aberration est la variation de l'indice de réfraction du matériau composant les lentilles en fonction de la longueur d'onde de la lumière qui les traverse. Il en résulte une distance focale variable, de sorte que la mise au point ne peut être effectuée simultanément pour toutes les couleurs du spectre. Si, par exemple, la mise au point est effectuée pour le rouge, le bleu est alors flou: l'image d'un objet blanc présente alors sur ses bords une irisation bleutée.



L'indice de réfraction du verre étant dépendant de la longueur d'onde de la lumière (*Figure 3-1*, page 3-4), il s'ensuit que la distance focale dépend elle aussi de la longueur d'onde.

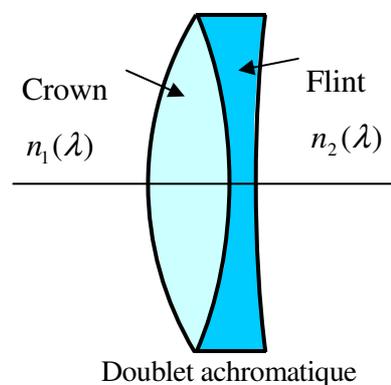
En général l'indice décroît avec la longueur d'onde, donc la focale d'une lentille convergente est légèrement plus longue pour le rouge que pour le bleu. Pour une lentille divergente, c'est le contraire. En photographie et en astronomie, l'aberration chromatique est un problème récurrent qui se résout de différentes manières:

- Ajout d'un filtre laissant passer une bande spectrale étroite.
- Configuration préférentielle de miroirs dans le système optique, qui ne présentent pas d'aberration chromatique (mais une aberration de sphéricité ou des aberrations de champ).
- Utilisation d'associations de lentilles qui ont des propriétés achromatiques. La correction de l'aberration chromatique, dans les **objectifs apochromatiques**, est obtenue en associant lentilles convergentes et divergentes.

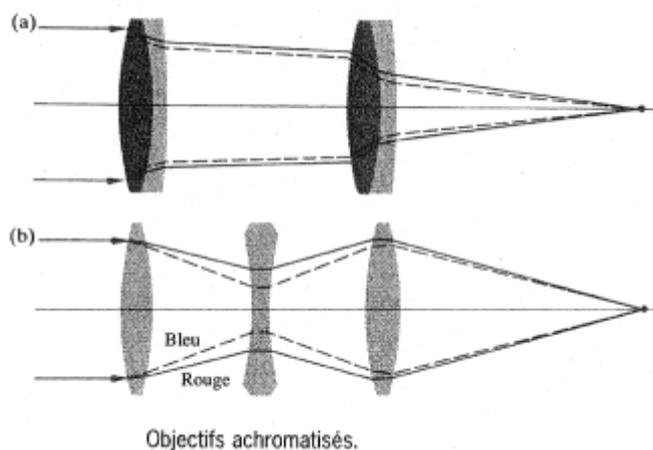
Dans la pratique, on peut corriger en grand partie ce défaut en accolant deux lentilles faites avec des verres différents: c'est ce qu'on appelle un **doublet achromatique**.

Les premiers objectifs achromatiques (Chester More Hall, John Dollond vers 1730) étaient constitués d'une lentille convexe en crown collée à une lentille concave en flint:

- Le verre **crown** contient des oxydes de sodium et de calcium et disperse peu (son nombre d'Abbe est supérieur à 45). Des types de verre crown encore moins dispersifs sont disponibles où sont ajoutés des oxydes de baryum ou de lanthane.
- Le verre **flint** avec une proportion importante d'oxyde de plomb ainsi que du silicate de potassium. Fort pouvoir dispersif (son nombre d'Abbe est inférieur à 39).



Il est aussi possible de bien corriger l'aberration chromatique avec des objectifs à plusieurs lentilles séparées.



En particulier pour un doublet à lentilles (constituées d'un même verre) séparées d'une distance  $d$ , on trouve que le doublet devient achromatique si les focales  $f_1$  et  $f_2$  sont comptés à la même couleur et

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (9.1)$$

## 10. PHOTOMÉTRIE ET RADIOMÉTRIE

La **radiométrie** est le domaine qui étudie la mesure de l'**énergie** des rayonnements électromagnétiques, y compris la lumière visible.

En optique, la **photométrie** est la science qui étudie le rayonnement lumineux du point de vue de la **luminosité** perçue par l'œil humain, plutôt que l'énergie totale du rayonnement. Les appareils de mesure en photométrie, sont étalonnés en fonction de la courbe de sensibilité relative de l'œil humain.

La différence entre les deux, c'est que la radiométrie prend en compte la totalité de l'énergie du rayonnement émis par un corps alors que la photométrie étudie seulement la partie du rayonnement émis par un corps qui est visible par l'œil humain et en plus la photométrie pondère les mesures en tenant compte de la sensibilité de l'œil humain.

Cette courbe de sensibilité relative moyenne de l'œil humain a été établie par la Commission internationale de l'éclairage (CIE) à partir d'un grand nombre d'individus. Elle montre que la sensibilité maximale de l'œil humain en vision de jour (vision photopique) se produit pour une longueur d'onde de 555 nanomètres. Cette courbe prend des valeurs non nulles pour des longueurs d'onde allant de 400 nanomètres à 700 nanomètres. En dehors de cette plage toutes les grandeurs photométriques seront nulles.

Les quantités de base de la photométrie et de la radiométrie sont les mêmes: **l'intensité**, le **flux lumineux**, **l'éclairement** et la **luminance**. Ces quatre facteurs sont liés comme ceci:

1. Une source d'éclairage artificielle – par exemple une lampe électrique - rayonne dans toutes les directions de l'espace un **flux lumineux** dont l'unité photométrique est le lumen (lm) et l'unité énergétique (en radiométrie) est le watt (W) .
2. Ce flux a, dans une direction donnée, une certaine **intensité** exprimée respectivement en candelas (cd) et watt/stéradian.
3. Une surface, placée à une distance donnée de la source, reçoit un **éclairement** qui s'exprime respectivement en lux (lx) et watt par mètre carré.
4. Enfin, la surface éclairée renvoie une partie de l'éclairement reçu en direction de l'observateur (par exemple, l'objectif d'une caméra): c'est la **luminance** exprimée respectivement en candelas par mètre carré (cd/m<sup>2</sup>) et watt par stéradian et par mètre cube.

**Efficacité lumineuse relative: vision photopique (norme CIE)**

$\lambda$ (nm)	$v(\lambda)$								
		400	0,000 4	500	0,323	600	0,631	700	0,004 1
		410	0,001 2	510	0,503	610	0,503	710	0,002 1
		420	0,004 0	520	0,710	620	0,381	720	0,001 05
		430	0,011 6	530	0,862	630	0,265	730	0,000 52
		440	0,023	540	0,954	640	0,175	740	0,000 25
		450	0,038	550	0,995	650	0,107	750	0,000 12
		460	0,060	560	0,995	660	0,061	760	0,000 06
		470	0,091	570	0,952	670	0,032	770	0,000 03
380	0,000 0	480	0,139	580	0,870	680	0,017	780	0,000 015
390	0,000 1	490	0,208	590	0,757	690	0,008 2		

## 10.1 TABLEAU DES UNITÉS PHOTOMÉTRIQUES

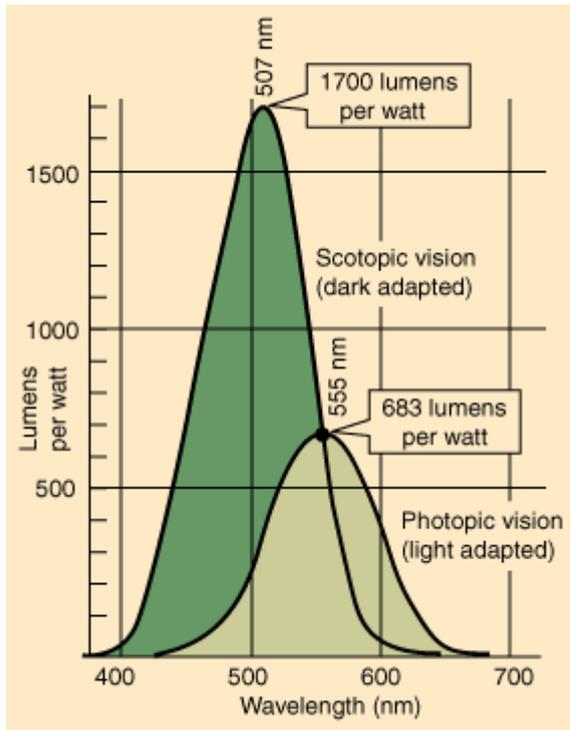
Grandeur	Unité SI	Symbole	Notes
Quantité de lumière	lumen·seconde	lm·s	le lumen·seconde est parfois appelé <i>talbot</i> dans les pays anglosaxons
Flux lumineux	lumen	lm	appelé parfois <i>puissance lumineuse</i>
Intensité lumineuse	candela	cd	c'est l' <b>unité de base</b> dans le système SI
Luminance	candela par mètre carré	cd/m <sup>2</sup>	appelée parfois <i>brillance</i>
Éclairement	lux	lx	il s'agit du flux lumineux reçu par une surface
Exitance	lumen par mètre carré	lm/m <sup>2</sup>	même dimension que l'éclairement mais il s'agit du flux lumineux émis par une surface
Efficacité lumineuse	lumens par watt	lm/W	le maximum possible est 683

## 10.2 TABLEAU DES UNITÉS RADIOMÉTRIQUES

Grandeur	Unité SI	Symbole	Notes
Énergie (radiante)	joule	J	c'est l'énergie au sens classique du terme
Flux ou puissance (radiante)	watt	W	c'est une puissance au sens commun du terme
Intensité énergétique	watt par stéradian	W·sr <sup>-1</sup>	la puissance est rapportée à l'unité d'angle solide
Luminance énergétique	watt par stéradian et par mètre carré	W·sr <sup>-1</sup> ·m <sup>-2</sup>	la puissance est rapportée à l'unité d'angle solide et à l'unité de surface apparente (surface projetée perpendiculairement à la direction de mesure)
Éclairement énergétique	watt par mètre carré	W·m <sup>-2</sup>	la puissance est rapportée à l'unité de surface réceptrice
Exitance énergétique	watt par mètre carré	W·m <sup>-2</sup>	la puissance est rapportée à l'unité de surface émettrice
Luminance énergétique spectrale	watt par stéradian et par mètre cube	W·sr <sup>-1</sup> ·m <sup>-3</sup>	la luminance énergétique est rapportée à l'unité de largeur de bande spectrale et s'exprime plus couramment en W·sr <sup>-1</sup> ·m <sup>-2</sup> ·nm <sup>-1</sup>

### 10.3 RELATION ENTRE UNITÉS PHOTOMÉTRIQUES ET RADIOMÉTRIQUES

Les courbes ici-bas représentent l'efficacité lumineuse spectrale pour la vision humaine dans les deux cas standard de vision diurne, avec l'œil adapté à un éclairage normal, appelée **vision photopique** et de vision nocturne, avec l'œil adapté à un environnement sans lumière, appelée **vision scotopique**.



L'unité photométrique de flux **lumen** est définie telle qu'au pic de la vision photopique on ait une efficacité lumineuse de **683 lumens/watt**. Ce rapport est aussi valable pour la vision scotopique à la même longueur d'onde de 507 nm.

En d'autres termes, la définition des unités photométriques prend en considération un rayonnement monochromatique dont la longueur d'onde correspond au maximum de sensibilité de l'œil humain, ~555 nm (540 THz). La raison du facteur 1/683 est historique. Il a été introduit pour des raisons de compatibilité avec l'ancienne définition de la candéla (bougie).

La puissance de la lumière (la luminosité) pouvant être exprimée en watts, on peut se demander pourquoi introduire des nouvelles unités. La justification réside dans l'importance de l'œil humain; on a besoin en pratique d'une unité qui tienne compte de la nature subjective du rayonnement électromagnétique sur la vision humaine.

### 10.4 INTENSITÉ LUMINEUSE

Dans le Système International (SI), l'unité d'intensité lumineuse est la **candéla**, cd en abrégé.

**La candéla est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de longueur d'onde 550 nm (fréquence 540·10<sup>12</sup> hertz) et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watt par stéradian.**

$$\text{candéla} \quad \boxed{1 \text{ cd} = \frac{\text{puissance}}{\text{angle solide}} = \frac{1 \text{ watt}}{683 \text{ stéradian}}} \quad [1/683 \text{ W/sr}]$$

Cette définition appelle quelques commentaires. Le **stéradian** (sr) est l'unité d'angle solide. Par analogie avec le radian qui mesure l'angle plan, le stéradian est défini comme étant l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur celle-ci une surface d'aire égale au carré du rayon de la sphère.

La surface d'une sphère de rayon  $r$  étant égale à  $4\pi r^2$ , il s'ensuit que l'angle solide qui contient toutes les directions est égal à  $4\pi$ . En se plaçant au centre d'une sphère d'un mètre de rayon, toute portion de sa surface mesurant un mètre carré définit un angle solide de 1 stéradian. La forme de la portion de surface n'a pas d'importance.

## 10.5 LE FLUX LUMINEUX

**Le flux lumineux est l'intensité lumineuse rayonnée dans un angle solide donné.**

En d'autres termes, on intègre l'intensité lumineuse sur l'angle solide. Le flux lumineux est donc égal à toute la puissance rayonnée dans un angle solide donné.

L'unité est le lumen, qui est le flux lumineux d'un rayonnement de 1 cd intégré sur 1 sr.

$$\text{lumen} \quad 1 \text{ lm} = \left( \frac{\text{puissance}}{\text{angle solide}} \right) (\text{angle solide}) = \frac{1}{683} \text{ watt}$$

Une source ponctuelle émettant dans toutes les directions un rayonnement lumineux d'intensité uniforme est qualifiée d'**isotrope**.

Considérons une source isotrope d'intensité  $I = 1$  candela. En intégrant sur tout l'angle solide, qui vaut  $4\pi$ , on trouve que le flux lumineux de cette source vaut  $\Phi = 4\pi$  lumens.

Le **rendement** d'une source lumineuse est donné en lumen par watt (lm/W).

Lampe	[lm/W]	Lampe	[lm/W]
Incandescence	5 - 20	Halogénures métalliques	70 - 90
Lampe halogène	15 - 35	Lampe au xénon (automobile)	80 - 90
LED	25 - 50	Sodium haute pression	100 - 130
Tube fluorescent	50 - 80	Sodium basse pression	140 - 180
Lampe économique	60 - 70		

Rendement lumineux de quelques sources

## 10.6 L'EXITANCE (OU ÉMITTANCE LUMINEUSE)

**L'exitance d'une source étendue correspond au flux lumineux émis par l'ensemble de ses points, rapporté à sa surface réelle.** Le lumen par mètre carré ( $\text{lm}/\text{m}^2$ ) est l'exitance d'une surface de 1 mètre carré qui émet un flux de 1 lumen

L'exitance désigne le flux lumineux émis par une surface lumineuse (par opposition à la mesure du flux lumineux d'une source lumineuse ponctuelle). Cette unité s'applique donc aux **sources de lumière étendues**.

Si l'on considère un élément de surface  $dS$  émettant globalement un flux lumineux  $d\Phi$

$$\text{Exitance} = \boxed{M = \frac{d\Phi}{dS}} \quad [\text{lm}/\text{m}^2] \quad (10.3)$$

## 10.7 LA LUMINANCE

Pour calculer l'intensité lumineuse émise par un élément de surface  $dS$  dans une direction donnée, il faut tenir compte de l'angle  $\theta$  entre la normale à la surface et la direction considérée.

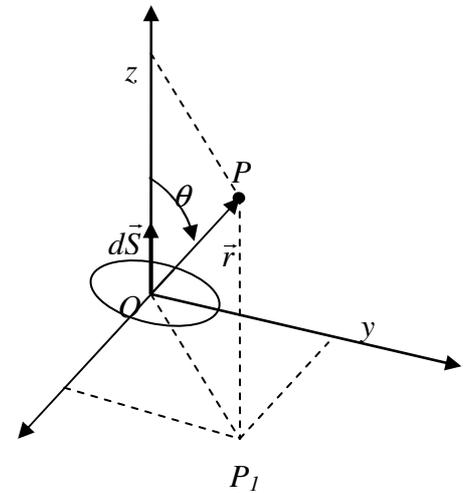
Soit  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  le rayon vecteur définissant cette direction. Depuis le point  $P$ , l'élément de surface  $dS$  est vu sous une surface apparente  $dS \cos \theta$ . Tenant compte de la surface apparente, la luminance se définit comme suit:

$$L = \frac{dM}{\cos \theta d\Omega} \quad (10.4)$$

où  $M$  est l'exittance définie précédemment.

Combinant (10.3) et (10.4), on peut écrire:

$$\text{Luminance} = \boxed{L = \frac{d^2\Phi}{dS \cos \theta d\Omega}} \quad [\text{lm/m}^2/\text{sr}] \text{ ou } [\text{cd/m}^2] \quad (10.5)$$



**La luminance est la seule grandeur perceptible par l'œil.**

Par définition, l'intensité lumineuse est égale au flux lumineux par stéradian.

On obtient l'intensité totale en intégrant sur la surface:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} = \int_{\text{Surface}} L \cos \theta dS \quad [\text{lm/sr}] \text{ ou } [\text{cd}] \quad (10.6)$$

La luminance  $L$  dépend aussi en général de  $\theta$ .

Lorsqu'elle est indépendante de l'angle d'émission, on dit que la source est **lambertienne** et obéit à la **loi de Lambert** qui démontre que pour une source lumineuse isotrope, l'émittance est proportionnelle à la luminance et le coefficient de proportionnalité est  $\pi$ .

Autrement dit, si  $M$  désigne l'émittance et  $L$  la luminance, pour une source lumineuse orthotrope (isotrope), on a:

$$\boxed{L = \frac{M}{\pi}} \quad [\text{lm/m}^2/\text{sr}] \text{ ou } [\text{cd/m}^2] \quad (10.7)$$

**Quelques valeurs de luminance typiques (cd/m<sup>2</sup>):**

seuil de perception de l'œil	0,000001
ciel nocturne	0,0001
pleine Lune, temps clair	2 000
tubes fluorescents	5 000
flammes éclairantes	15 000
papier blanc en plein Soleil, en été à midi	30 000
<b>éblouissement vers</b>	500 000
filament de carbone	700 000
filament de tungstène ordinaire	10 000 000
filament de lampe de projection	20 000 000
cratère positif, arc électrique au charbon	160 000 000
<b>apparition possible de lésions oculaires vers</b>	250 000 000
arc au xénon	400 000 000
lampes à vapeur de mercure à haute pression	500 000 000
Soleil à travers l'atmosphère	1 600 000 000
lampes-éclair (flashes, pendant quelques μs)	10 000 000 000

## 10.8 ECLAIREMENT

**L'éclairement est l'ensemble des flux lumineux interceptés par unité de surface d'un objet.**

Soit une source ponctuelle isotrope d'intensité lumineuse  $I$  placée au centre d'une sphère imaginaire de  $r$  mètres de rayon. Le flux lumineux  $d\Phi$  intercepté par un élément de surface  $dS$  de cette sphère vaut:

$$d\Phi = (\text{intensité})(\text{angle solide}) = I \frac{dS}{r^2}$$

Donc, par définition, l'éclairement de cette surface  $dS$  vaut:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I}{r^2}$$

L'unité d'éclairement est donc le lumen par mètre carré ( $\text{lm}/\text{m}^2$ ), qui a reçu le nom de lux, en abrégé lx, pour la distinguer de l'unité d'exittance.

$$\text{Eclairement} = \boxed{1 \text{ lux} = \frac{\text{flux}}{\text{surface}} = \frac{\text{lumen}}{\text{m}^2}} \quad [\text{lx}] \quad (10.9)$$

**Quelques niveaux d'éclairement typique:**

	[lux]
En plein soleil	100 000
Sous un ciel nuageux	6000 - 10 000
Salle de classe	1000
Local usuel	100
Minimum pour la lecture	10
Minimum perceptible par l'œil	$10^{-9}$

## 10.9 FLUX RÉFLÉCHI PAR UNE SURFACE

Les objets éclairés sont des sources lumineuses secondaires. Le flux lumineux réfléchi est proportionnel au flux lumineux incident et à un facteur qui dépend de la nature de la surface de l'objet.

**La réflectance est le quotient du flux lumineux réfléchi par le flux incident.**

$$\text{Réflectance} = \boxed{R = \frac{\text{flux réfléchi}}{\text{flux incident}}} \quad [\text{sans dimensions}] \quad (10.10)$$

En toute rigueur, ce rapport dépend de la longueur d'onde. Dans la pratique, on se contente en général d'une moyenne prise sur les longueurs d'ondes visibles.

### 10.10 LOI DE BOUGUER

La loi de Bouguer explicite la **relation entre intensité de source et éclairement de récepteur**.

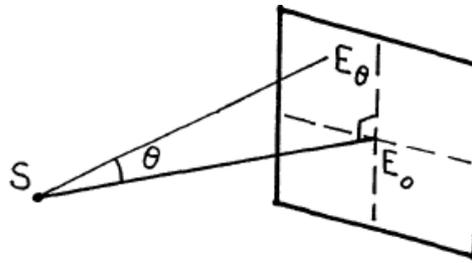
Si  $I$  est l'intensité de la source **en direction du récepteur**,  $T$  la transmission du milieu qui les separe sur une distance  $d$  et  $\theta$  l'angle d'obliquité du récepteur vis a vis de la direction de visée, l'éclairement du récepteur est (loi dite de Bouguer):

$$E = T \cdot \frac{I \cos \theta}{d^2} \tag{10.10}$$

En conséquence l'éclairement d'un plan face à une source quasi ponctuelle et isotrope d'intensité  $I_0$  (ici pour  $T = 0$ ):

$$E_0 = I_0 / d^2$$

$$E = T \cdot \frac{I_0 \cos \theta}{(d / \cos \theta)^2} = \frac{I \cos^3 \theta}{d^2} = E_0 \cos^3 \theta \tag{10.11}$$



### 10.11 RAPPEL: ÉLÉMENT D'ANGLE SOLIDE ET COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

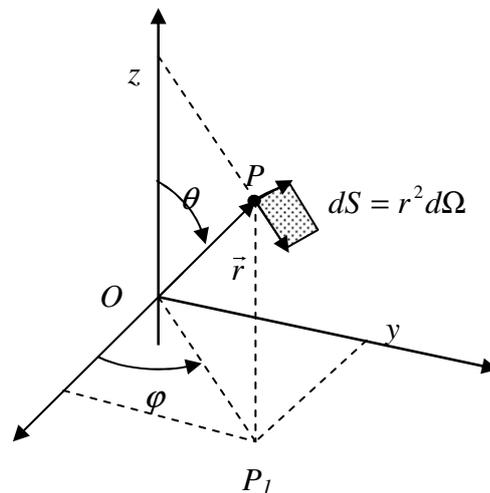
En projection:  $OP_1 = r \sin \theta$

Élément de surface:

$$dS = (r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)$$

Élément d'angle solide:

$$d\Omega = (dS / r^2) = (d\theta)(\sin \theta d\varphi)$$



En intégrant  $d\Omega$  sur  $\theta$  et  $\varphi$ , on obtient que l'angle solide total est égale à  $4\pi$ .

$$\iint d\Omega = \iint \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi(-\cos \theta) \Big|_0^\pi = -2\pi((-1) - 1) = 4\pi$$

## 10.12 EXERCICES

1. Une lampe fluorescente de puissance  $P = 10 \text{ W}$  a une intensité lumineuse  $I = 35 \text{ cd}$ . Calculer le flux lumineux et l'efficacité lumineuse de la lampe. **Rep.** 440 lm, 44 lm/W
2. Une ampoule électrique de puissance  $P = 60 \text{ W}$  et de rendement lumineux  $k = 14 \text{ lm/W}$  est suspendue à une hauteur  $h = 3 \text{ m}$  au-dessus d'une table. Quel est l'éclairement  $E$  de la table juste sous l'ampoule ? A quelle hauteur  $h'$  devrait-on mettre l'ampoule pour doubler l'éclairement de la table ? **Rep.** 7,42 lux, 2,12 m
3. Un éclairement d'environ  $E = 200 \text{ lux}$  est recommandé pour la lecture. A quelle distance  $d$  faut-il placer une ampoule, de puissance  $P = 75 \text{ W}$  et d'intensité  $I = 90 \text{ cd}$ , d'un livre si l'angle entre les rayons lumineux et le plan du livre ouvert vaut  $60^\circ$  ? **Rep.** 62 cm
4. Une lampe est suspendue à une hauteur  $h = 2 \text{ m}$  au dessus d'une table. Combien de fois l'éclairement  $E_0$  juste sous la lampe est-il plus grand que l'éclairement  $E_1$  d'un point situé à une distance  $x = 1,20 \text{ m}$  sur la table vers le côté ? On suppose que l'intensité  $I_1$  est constante dans toutes les directions. **Rep.** 1,59 fois
5. Même question avec  $h = 2 \text{ m}$  et  $x = 1,20 \text{ m}$ : mais on raisonnera sur un éclairement  $E_2$  en supposant que l'intensité lumineuse dans la direction latérale vaut  $I_2 = I_0 \cos\theta$  ( $\theta$  est l'angle entre la normale et la direction latérale,  $I_0$  est intensité selon la verticale). **Rep.** 1,85 fois
6. Intensité d'un laser 1 mW versus celle du Soleil : calculez et comparez l'intensité de lumière reçue par le Soleil et celle d'un faisceau laser d'un 1 mW sur la rétine d'un humain.
  - Intensité maximale du Soleil au niveau de la mer  $\approx 1 \text{ kW/m}^2$ .  
L'angle sous tendu par le Soleil est de  $0.5 \text{ degrés} = 0,0087 \text{ rad}$ .
  - Diamètre de la pupille  $\approx 2 \text{ mm}$ , l'aire  $\approx 3 \text{ mm}^2$ . Longueur focale de l'œil  $\approx 22 \text{ mm}$ .**Rep.:** l'intensité lumineuse du Soleil sur la rétine =  $100 \text{ mW/mm}^2$ .  
L'intensité lumineuse du laser HeNe sur la rétine  $\approx 16.67 \text{ watts/mm}^2$ .

### Commentaire:

Alors un pointeur laser de 1 mW a le potentiel de produire une intensité sur la rétine 167 fois plus grande que celle du Soleil.

Mais il y a plusieurs facteurs dont il faut tenir compte pour calculer le risque réel de dommage. Si la personne est près du laser alors l'image ne sera pas au foyer et aura une surface plus grande que la limite de diffraction calculée. De plus les mouvements rapides de l'œil additionnées aux vibrations de la main qui tient le faisceau vont faire que chaque partie de la rétine va être exposée moins longtemps.

Le danger pour la rétine n'est pas seulement la valeur de l'intensité lumineuse, il faut aussi considérer la chaleur transmise car c'est cela détériore les cellules sur la rétine. La capacité de la rétine à dissiper la chaleur ne dépend pas de la surface mais bien du périmètre de la zone affectée sur la rétine. Les vaisseaux sanguins sont à l'intérieur de la rétine. C'est le flux sanguin qui dissipe l'énergie, il agit sur le périmètre en premier lieu et non le centre de la zone affectée par le faisceau laser. Si on tient compte du ratio des circonférences entre le l'image du Soleil et le faisceau laser sur la rétine le facteur tombe à 7 plutôt que 167. Si on tient compte aussi que les surfaces les plus larges sont moins efficaces pour dissiper l'énergie alors **la puissance réelle absorbée par la rétine est 2 fois plus grande pour le laser 1mW que pour le Soleil.**

## 11. LE MODÈLE ONDULATOIRE DE LA LUMIÈRE

### 11.1 LA NATURE ONDULATOIRE DE LA LUMIÈRE

Le physicien danois Christian Huygens fut le premier, en 1678, à proposer de manière convaincante une théorie ondulatoire de la lumière.

La théorie ondulatoire de la lumière de Huygens repose sur une construction géométrique qui permet de prédire où se trouvera, en tout temps, un front d'onde donné si on connaît sa position actuelle.

Sa théorie, beaucoup plus simple du point de vue mathématique que la théorie de Maxwell, permet par exemple d'expliquer les lois de réflexion et de réfraction à partir du concept d'onde.

**Le principe de Huygens:**

**tous les points d'un front d'onde servent de points sources à de petites ondes secondaires sphériques.**

Après un temps  $t$ , la nouvelle position du front d'onde sera celle de la surface tangente à ces ondes secondaires. Le plan de est parallèle au plan  $ab$  et se trouve à une distance perpendiculaire  $c\Delta t$  de ce dernier.

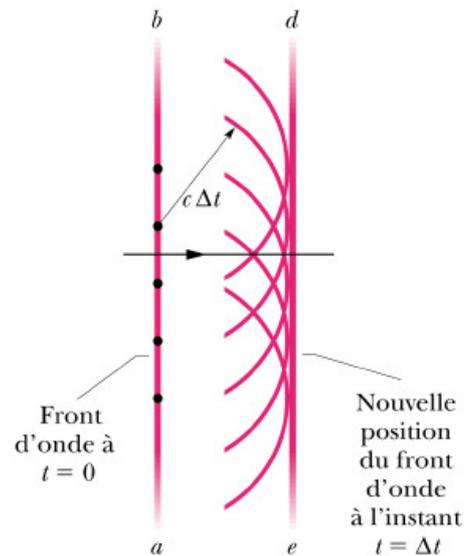


Figure 11-1 La propagation d'une onde vue comme la superposition d'ondelettes.

### 11.2 NECESSITE DE LA DESCRIPTION ONDULATOIRE

Les phénomènes que l'on rencontre dans les systèmes optiques ne sont de loin pas tous explicables par la théorie de l'optique géométrique que nous avons étudiée jusqu'à présent. Dans beaucoup de cas, on devra soit tenir compte du fait que la lumière est une onde électromagnétique, soit utiliser cette caractéristique à notre profit.

Une manifestation évidente du caractère ondulatoire de la lumière est donnée par les interférences lumineuses. On observe cette situation lorsque deux ondes lumineuses (ou plus), issues d'une même source, peuvent parvenir au même point en suivant des chemins différents (cf. Figure 11-2 à gauche).

La source  $S$  éclaire le point  $M$  via deux dispositifs  $D_1$  et  $D_2$ , déviant la lumière dans la direction de la zone d'observation. Si on étudie alors le comportement, au cours du temps, des deux ondes lumineuses qui se superposent en  $M$ , on peut observer diverses situations:

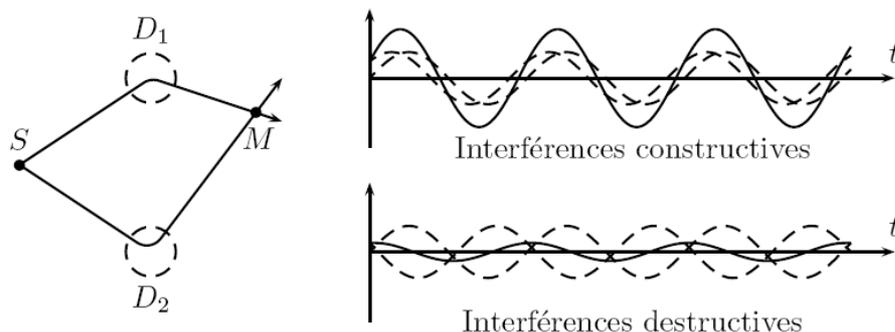


Figure 11-2 Interférence des ondes électromagnétiques

Si le déphasage entre les deux ondes, tel qu'il résulte de la différence de trajet, est faible (Figure 11-2 droite, en haut), la somme des deux ondes qu'on observe en M a une amplitude élevée: on observe une quantité importante de lumière: on parle alors d'**interférences constructives**.

Si au contraire ce déphasage est proche de  $\pi$  (Figure 11-2 à droite, en bas), la somme des deux ondes en M a une amplitude faible (ou nulle): on n'observe que peu de lumière. On parle d'**interférences destructives**. L'observation de l'alternance de zones sombres et claires, qu'on appelle **franges d'interférence**, constitue à la fois une preuve du caractère ondulatoire de la lumière et une méthode métrologique adaptée à la mesure très précise de faibles dimensions.

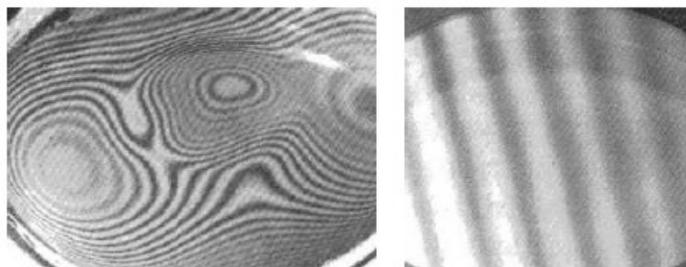


Figure 11-3 Franges d'interférence alternativement claires et sombres

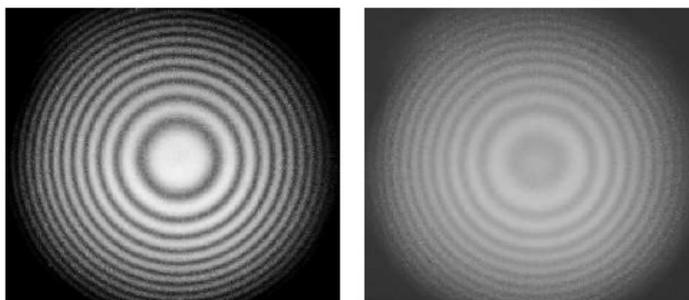


Figure 11-4: On observe aussi la différence de contraste (le contraste désigne l'écart relatif de luminosité entre franges claires et franges sombres). il s'agit dans les deux cas du même dispositif interférentiel mais les sont bien contrastées à gauche, très peu à droite.

## 11.3 RAPPEL SUR LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

### 11.3.1 Introduction

Cette section présente une description rapide des propriétés associées à la propagation de la lumière, considérée comme une onde.

Une onde est un phénomène doublement périodique, présentant à la fois une périodicité spatiale et une périodicité temporelle. Nous noterons  $\lambda$  la longueur d'onde et  $T$  la période temporelle de l'onde, sans préciser pour l'instant sa nature.

On utilisera aussi les pulsations associées,  $k = 2\pi/\lambda$  (le nombre d'onde) et  $\omega = 2\pi/T$ .

La vitesse de propagation associée (en fait, la vitesse de phase de l'onde lumineuse) est alors

$$v = \omega/k = \lambda/T$$

La lumière est une onde électromagnétique dont les champs vérifient les équations:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du moyen ambiant. Pour le vide on a:

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \quad [s^2 C^2 / m^3]$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad [m Kg / C^2]$$

La théorie de Maxwell nous apprend que la vitesse de propagation de cette onde dans le vide est

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 2,99792458 \times 10^8 \quad [m/s].$$

Comme toutes les ondes E-M, la lumière est une onde transverse, c'est-à-dire que les champs électrique et magnétique associés sont transverses à la direction de propagation. L'onde électromagnétique plane progressive représentée sur la Figure 11-5 se propage dans la direction  $\mathbf{e}_x$ ; elle a pour vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ , pour pulsation  $\omega$  avec pour vitesse de phase

$$v = c_0/n = \omega/k$$

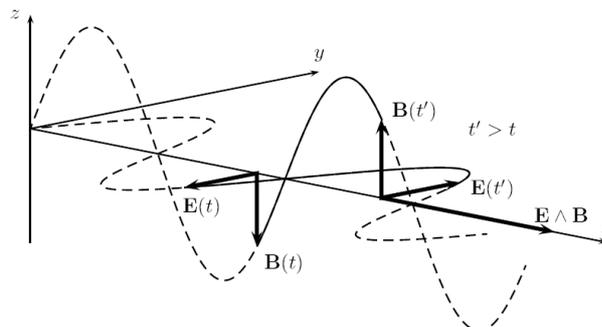


Figure 11-5: Onde électromagnétique

Les champs électrique et magnétique sont en permanence perpendiculaires à la direction de propagation: il s'agit d'ondes transverses. L'onde représentée sur la Figure 11-5 est de plus polarisée rectilignement selon  $\mathbf{e}_y$ , c'est-à-dire que le champ électrique oscille au cours du temps tout en gardant une direction fixe; nous verrons ultérieurement que ce n'est pas un cas général puisque la direction de  $\mathbf{E}$  peut être variable dans le plan Oyz.

### 11.3.2 Le vecteur de Poynting et l'éclairement

Les variations des champs électrique et magnétique sont liées par les équations de Maxwell. On peut alors écrire les équations générales d'une onde plane monochromatique:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (11.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (11.2)$$

$\vec{r}$  est le vecteur position du point considéré.

$\vec{k}$  est le vecteur d'onde dont la norme vaut  $2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde.

$E_0$  est l'amplitude du champ électrique en volts/mètre [V/m].

$B_0$  est l'amplitude du champ magnétique en Tesla [T].

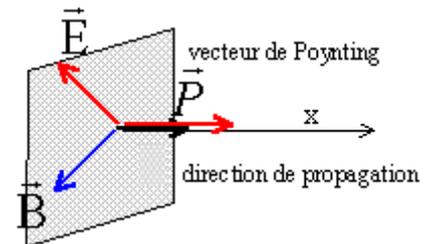
Notons qu'on peut représenter l'onde par un seul de ces champs, en général le champ électrique. En effet en tout moment et endroit on a:

$$E = c B \quad (11.3)$$

L'onde électromagnétique décrite ci-dessus transporte évidemment l'énergie dans la direction du vecteur d'onde, donc dans la direction de  $\vec{E} \wedge \vec{B}$ .

La densité surfacique de puissance portée par l'onde, que nous appelons éclairement énergétique, est donnée par la norme du **vecteur de Poynting**:

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \quad (11.4)$$



La direction de ce vecteur est la **direction de propagation** de l'onde.

La variation temporelle rapide de cette expression (avec des pulsations de l'ordre de  $10^{14}$  rad/s) explique qu'on se contente en général de calculer sa moyenne. En effet, aucun détecteur ne peut suivre des évolutions aussi rapides.

En utilisant les lois de Maxwell, on montre que **l'amplitude du vecteur de Poynting moyen** correspond à **l'éclairement**  $E_e$  d'une surface normale à  $\vec{P}$  et vaut

$$E_e = \langle P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \cong 1.33 \cdot 10^{-3} E_0^2 \quad (11.5)$$

Ces expressions sont valables dans le vide ( $n \approx 1$ ). Dans le cas de transmission dans un milieu d'indice  $n$ ,  $\epsilon_0$  est remplacé par  $n^2 \epsilon_0$  et  $c$  par  $c/n$ :

$$E_e = \langle P \rangle = \frac{n}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (11.6)$$

On retiendra que:

- Seul un des deux champs, par exemple le champ électrique, est nécessaire à la description de l'onde. Il est d'usage en optique de ne parler que du champ électrique.
- La puissance transmise par unité de surface, et donc l'éclairement, sont proportionnels au carré de l'amplitude  $E_0^2$  du champ électrique.

## 11.4 EXERCICES

1. Un faisceau laser de diamètre 2 mm a une puissance 6 kW.  
Calculer l'éclairement moyen et l'amplitude des champs électrique et magnétique.  
**Rep.:**  $E_e = 1.91e^9 \text{ W/m}^2$ ,  $E_0 = 1.2e^6 \text{ V/m}$ ,  $B_0 = 4e^{-3} \text{ T}$ .
2. Une onde lumineuse traverse un verre d'indice 1,5. Si le champ électrique est de 100 V/m, calculer le champ magnétique et l'éclairement. **Rep.:**  $5e^{-7} \text{ T}$ ,  $19.88 \text{ W/m}^2$ .

## 12. INTERFÉRENCE

L'existence des phénomènes d'interférence a été la preuve la plus convaincante que la lumière est une onde, car on ne peut pas expliquer ces phénomènes par un modèle corpusculaire de la lumière.

### 12.1 INTERFÉRENCE DE DEUX SOURCES LUMINEUSES

#### 12.1.1 Fentes de Young

Les **fentes de Young** ou interférences de Young désignent une expérience qui consiste à faire interférer deux faisceaux lumière issus d'une même source, en les faisant passer par deux petits trous percés dans un plan opaque.

Cette expérience fut réalisée pour la première fois par Thomas Young en 1801 et a permis de comprendre le comportement et la nature de la lumière. Sur un écran disposé en face des fentes de Young, on observe une alternance de franges sombres et illuminées.

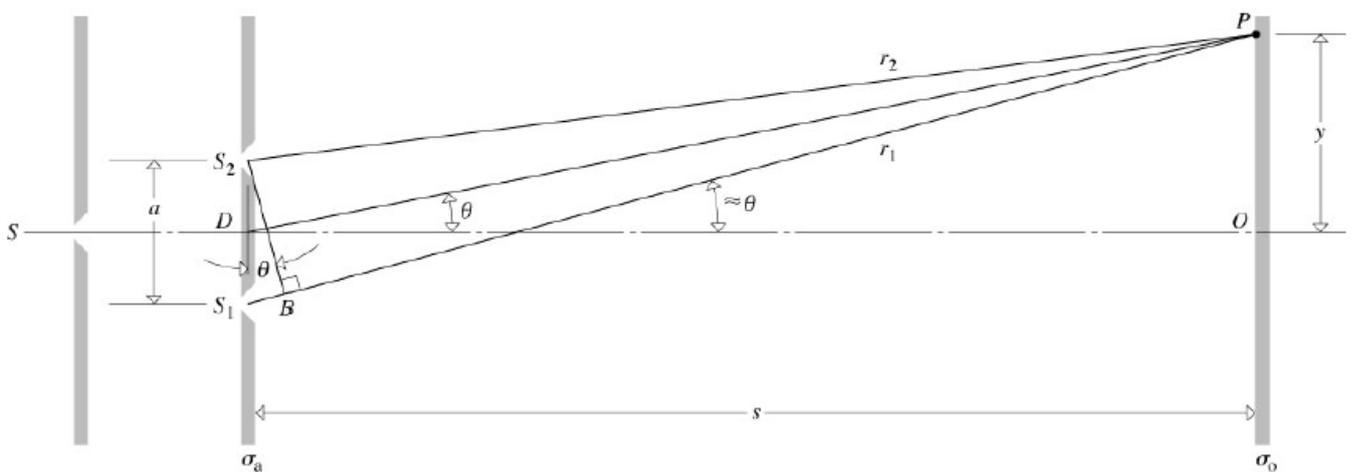


Figure 12-1 Schéma de l'expérience des fentes de Young

Dans l'expérience de Young, on utilise une source lumineuse  $S$  monochromatique et on interpose une plaque percée de 2 fentes. Celles-ci se comportent comme des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ . On observe alors, sur un écran placé derrière, des franges alternativement sombres et claires: les ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  interfèrent entre elles.

Considérons maintenant un point  $P$  situé sur l'écran. Il est éclairé par les ondes lumineuses émises par  $S_1$  et  $S_2$  qui peuvent s'écrire respectivement, au point  $P$ :

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

et

$$E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \Delta\varphi),$$

où  $E_0$  est l'amplitude du champ (électrique),  $\omega$  la pulsation des ondes,  $\Delta\varphi$  leur déphasage et  $t$  le temps.

$\Delta\varphi$  est un déphasage et caractérise le fait qu'une onde a un certain **retard** par rapport à l'autre. En effet, pour arriver au point  $P$ , le chemin à parcourir n'est pas de la même longueur pour la lumière qui provient d'une source ou de l'autre.

- Si  $\Delta\varphi$  est un multiple de  $2\pi$ , les ondes s'ajoutent et on obtient une frange lumineuse sur l'écran, ce que l'on appelle une **interférence constructive**.
- En revanche si  $\Delta\varphi$  est un multiple impair de  $\pi$  alors les ondes s'annulent et on obtient une frange sombre sur l'écran, c'est alors une **interférence destructive**.

Cela explique pourquoi on observe, sur l'écran, des franges successivement claires et sombres.

Il n'y a pas de formule simple permettant de décrire ces franges. Toutefois, pour simplifier le problème, il est possible de supposer que l'écran est placé loin des fentes.

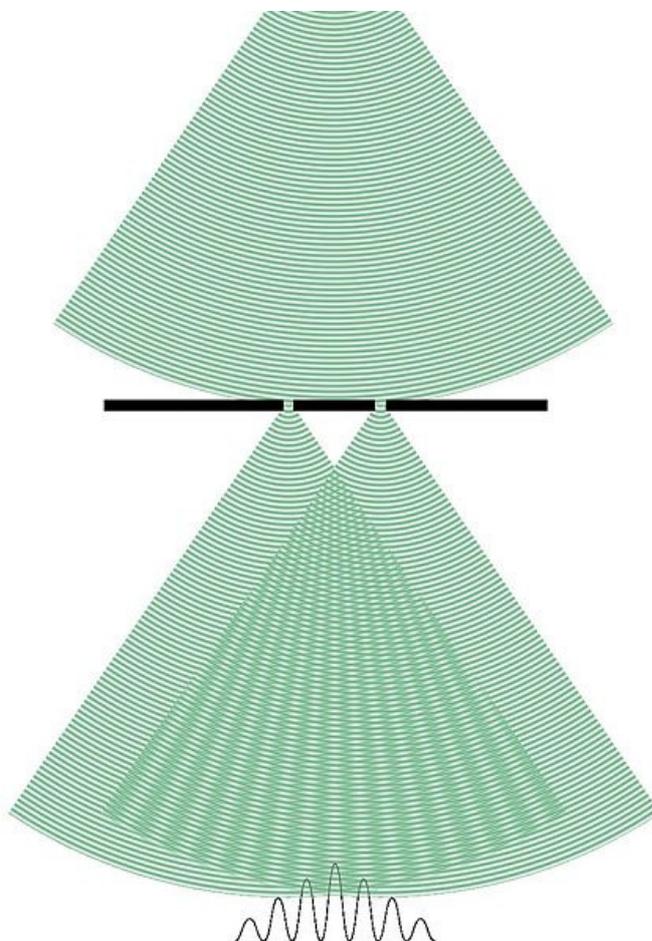


Figure 12-2: Illustration de l'apparition de franges d'interférences.

### 12.1.2 Cas d'un écran éloigné

Supposer que l'écran est éloigné des fentes revient, plus précisément, à poser que la distance  $s$  entre l'écran et les fentes est grande devant la distance  $a$  entre les fentes (c'est-à-dire  $s \gg a$ ).

Cette approximation est utile dans le calcul de  $\Delta\varphi$ . En effet, les distances de  $P$  à  $S_1$  et de  $P$  à  $S_2$ , notées respectivement  $r_1$  et  $r_2$ , vérifient alors:

$$r_2 - r_1 = \frac{ay}{s} \quad (12.1)$$

où  $y$  est la distance de  $P$  au centre de l'écran.

Cette différence de trajet, souvent appelée différence de marche (*optical path distance*, abrégé OPD en anglais), correspond à un déphasage entre les deux rayons de

$$\Delta\varphi = \frac{2a\pi y}{s\lambda} \quad (12.2)$$

Les maxima d'éclairement (intensité lumineuse sur l'écran) se trouveront pour

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (12.3)$$

Et donc l'angle  $\theta_m$  du maximum d'ordre  $m$  est donc donné par

$$a \sin \theta_m = m\lambda \quad \text{avec } m = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (12.4)$$

Il y a toujours une frange brillante au centre. On trouve aussi que la frange brillante d'ordre  $m$  se trouve à une distance  $y_m$  de la frange centrale:

$$y_m = \frac{s}{a} m\lambda \quad (12.5)$$

Si  $I_0$  est l'éclairement de la frange centrale, on peut aussi montrer que l'éclairement reçu au niveau de l'écran est proportionnel à:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{a\pi y}{s\lambda} \quad (12.6)$$

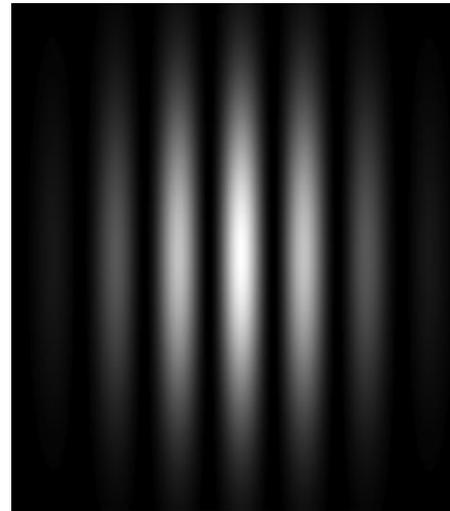
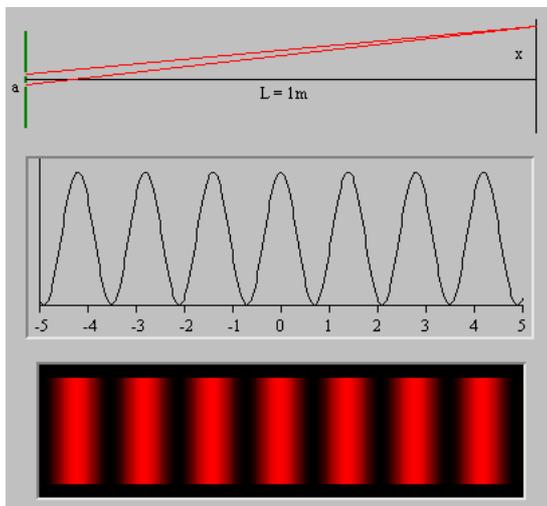
L'éclairement est donc réparti de manière périodique.

Les franges sont séparées d'une distance  $s\lambda / a$ .

Cela correspond, pour une lumière visible, avec des fentes séparées d'un millimètre, à des franges séparées d'un millimètre sur un écran placé à deux mètres.

Ces résultats aboutissent aux observations suivantes:

- plus les fentes sont éloignées l'une de l'autre, plus les franges sont rapprochées;
- plus l'écran est éloigné, plus les franges sont espacées.



En principe, selon les formules données ci-haut l'éclairement des franges est partout égale et le motif des franges formées par les fentes de Young devrait être celui de la figure de gauche. En réalité on observe en réalité (voir figure de droite ci-dessus) que leur éclairement diminue lorsqu'on s'éloigne du centre de l'écran. Deux phénomènes sont à l'origine de cette observation.

Premièrement, les fentes ont une certaine largeur, ce qui implique un phénomène de **diffraction** par chacune des fentes, que l'on va introduire au chapitre suivant. Le second phénomène à prendre en compte est le fait que les ondes émises en  $S_1$  et  $S_2$  sont des ondes sphériques, c'est-à-dire que leur amplitude décroît au fur-et-à-mesure qu'elles avancent.

Au chapitre 13.2 nous allons donc corriger l'expression (12.6) pour tenir compte également de ces effets.

## 12.2 LA NOTION DE COHERENCE

La cohérence est l'ensemble des propriétés de corrélation d'un système ondulatoire. Son sens initial était la mesure de la capacité d'onde(s) à donner naissance à des interférences - du fait de l'existence d'une relation de phase définie - mais il s'est élargi. On peut parler de cohérence entre 2 ondes, entre les valeurs d'une même onde à deux instants différents (cohérence temporelle) ou entre les valeurs d'une même onde à deux endroits différents (cohérence spatiale).

### 12.2.1 Trains d'onde

Les atomes d'une source lumineuse émettent des impulsions de radiation pendant une durée  $\tau$  extrêmement courte ( $\tau \approx 10^{-10}$  s), formant ce qu'on nomme un train d'ondes. Chaque train d'onde contient typiquement quelques  $10^4$  oscillations.

La radiation émise par un train d'ondes donné est quasi monochromatique, polarisée rectilignement, possédant une amplitude et une phase initiale donnée.

En général, la direction de polarisation, l'amplitude et la phase initiale sont des grandeurs qui varient aléatoirement d'un train d'onde à un autre. Ceci est particulièrement le cas pour une lumière "naturelle" émise par une source étendue. Les différents atomes constituant la source émettent une succession ininterrompue de trains d'onde de durée  $\tau$  ne possédant entre eux aucune relation ni de phase, ni d'amplitude, ni de direction de polarisation. Cette absence de corrélation dans les directions de polarisation des différents trains d'onde explique que la lumière naturelle est non polarisée.

Les composantes du vecteur électrique  $E$  de l'onde résultante à l'instant  $t$  peuvent s'écrire sous la forme scalaire:

$$E = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi(t))$$

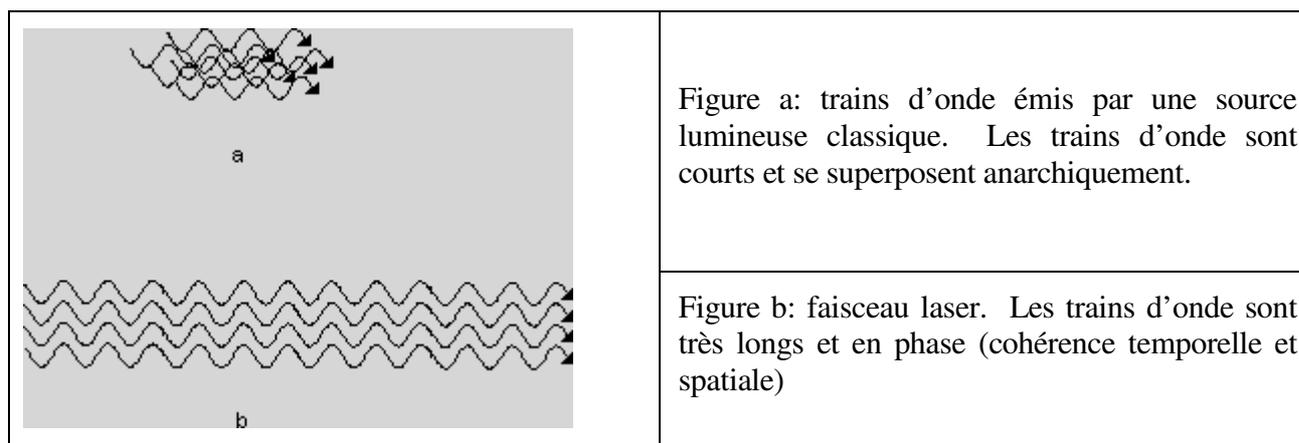
où l'amplitude  $A$  peut être considérée comme constante à cause du très grand nombre d'atomes émetteurs, et où  $\varphi(t)$  est une fonction du temps. Si cette fonction est essentiellement aléatoire, une telle source est dite temporellement incohérente.

On appelle **temps de cohérence**  $\tau_c$  d'une source la durée moyenne des trains d'onde en un point donné. On note  $\ell_c = c \cdot \tau_c$  la distance parcourue par la lumière (dans le vide) pendant  $\tau_c$ .

$\ell_c$  est appelée **longueur de cohérence temporelle**.

Ces caractéristiques sont liées à la largeur de bande spectrale de la source. Une onde réellement monochromatique (une seule fréquence) aurait, en théorie, un temps et une longueur de cohérence infinis. En pratique, aucune onde n'est réellement monochromatique (car cela requiert un train d'ondes de durée infinie), mais, en général, le temps de cohérence de la source est inversement proportionnel à sa largeur de bande  $\Delta\nu$ .

On définit le temps de cohérence  $\tau_c$  de la source par l'inverse de la largeur spectrale  $\tau_c = 1/\Delta\nu$ . Si les différents chemins suivis par l'onde diffèrent d'une longueur supérieure à  $\ell_c = c \cdot \tau_c$ , il n'y aura pas d'interférences.



### 12.2.2 Cohérence spatiale

Un autre problème vient de l'étendue spatiale de la source: les trains d'onde provenant de points différents de la source n'ont pas tous le même vecteur d'onde  $k$

En effet les ondes ont également une **cohérence spatiale**: c'est la capacité de chacun des points du front d'onde à interférer avec n'importe quel autre point. Si la source est étendue, il y aura addition d'ondes incohérentes émises par chaque point source, ce qui peut brouiller les interférences.

L'expérience des fentes de Young repose sur la cohérence spatiale du faisceau illuminant les deux fentes: si le faisceau avait été incohérent spatialement, par exemple si la lumière solaire n'était pas passée à travers une première fente, alors aucune frange d'interférence ne serait apparue.

La **largeur de cohérence** de la source donne la taille maximale permise pour qu'il y ait interférences. Dans le cas des fentes de Young, la largeur de cohérence est

$$\ell_s = \frac{\lambda \cdot D}{\Delta S} \quad (12.7)$$

ou  $\lambda$  est la longueur d'onde de la source,  $\Delta S$  la largeur de la distribution spatiale d'éclairement et  $D$  la distance à laquelle l'on se place.

La largeur de cohérence dépend donc à la fois de caractéristiques intrinsèques à la source ( $\lambda$  et  $\Delta S$ ) et de la distance  $D$  à laquelle on se trouve: plus on s'éloigne, plus la source se rapproche d'une source ponctuelle.

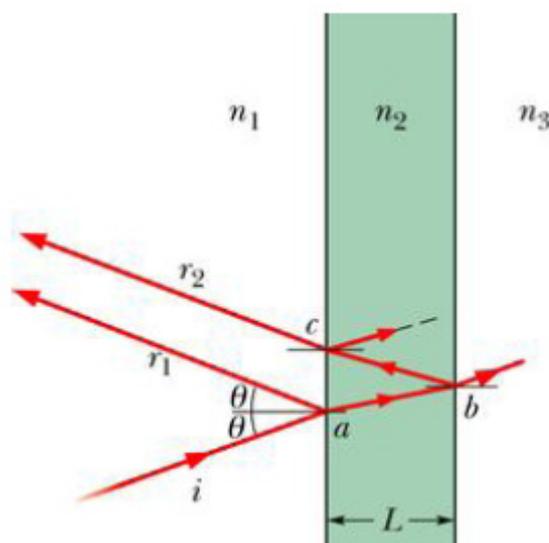
### 12.3 INTERFÉRENCE PAR REFLEXION SUR COUCHES MINCES

Les bulles de savon, les plaques d'huile peuvent prendre des couleurs chatoyantes; ceci n'est pas dû à la réfraction comme pour l'arc-en-ciel, mais à des interférences constructives et destructives de la lumière. Les ondes qui interfèrent peuvent soit renforcer ou supprimer certaines couleurs dans le spectre de lumière incident.

Quand la lumière rencontre une surface de verre,  $\sim 4\%$  de l'énergie incidente est réfléchi, ayant pour conséquence de diminuer d'autant le faisceau transmis. Cette perte de lumière peut être un sérieux problème pour des instruments optiques utilisant beaucoup de composants (lentilles etc.). En déposant une couche mince et transparente sur la surface du verre, on peut réduire la quantité de lumière réfléchi (donc augmenter celle transmise) par des interférences destructives dans cette couche mince.

Soit une onde lumineuse,  $i$ , en incidence presque normale ( $\theta \sim 0$ ) et se réfléchissant sur une couche mince ( $n_2$ ) d'épaisseur  $L$ . Le rayon  $r_1$  est réfléchi par la face antérieure. Le rayon  $r_2$ , réfléchi par la face arrière, parcourt un chemin supplémentaire,  $abc$ , par rapport à  $r_1$ .

Si les rayons  $r_1$  et  $r_2$  arrivent en phase dans l'œil d'un observateur, ils produiront une interférence constructive et la région  $ac$  apparaîtra brillante à l'observateur. Si par contre, ils sont en opposition de phase, cette région apparaîtra noire, bien qu'elle soit illuminée.



Comme  $\theta \sim 0$ , le parcours supplémentaire pour  $r_2$  peut être approximé par  $2L$ .

Mais pour trouver la différence de phase entre les 2 ondes, on ne peut pas simplement chercher le nombre de longueurs d'onde  $\lambda$  équivalent à  $2L$  car le trajet  $abc$  se fait dans un milieu  $n_2 \neq n_1$ , la réflexion peut changer la phase.

## 12.4 L'INTERFEROMETRE DE MICHELSON

L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs M1 et M2 et d'une lame semi-réfléchissante appelée séparatrice. Ces trois éléments sont orientables et M1 est déplaçable par translation (pour ajuster la distance notée  $d$  sur le schéma).

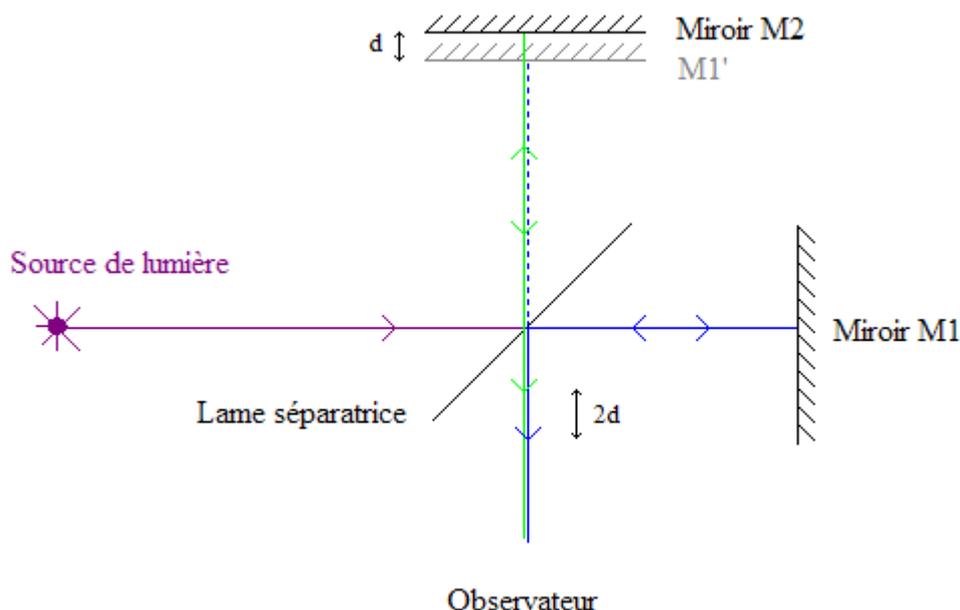


Figure 12-3: schéma de l'interféromètre de Michelson

Sur le schéma ci-contre, qui modélise un Michelson utilisé en lame d'air, la source de lumière envoie un rayon (d'éclairement  $I$ ) vers la séparatrice. Ce rayon est divisé en deux rayons d'éclairement  $I/2$ . M1' représente l'image du miroir M1, symétrique par rapport à la séparatrice; le trait pointillé bleu représente donc un trajet virtuel équivalent au trajet réel de la lumière vers le miroir M1. La différence de longueur  $d$  des bras de l'interféromètre induit une différence de marche entre les deux rayons égale à  $2d$ .

On peut régler le Michelson de différentes manières:

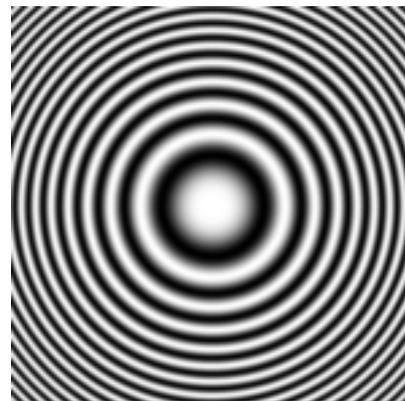
- Si les miroirs M1 et M2 sont strictement perpendiculaires, c'est la configuration **en lame d'air** à faces parallèles.
- S'ils forment un angle  $\alpha$  entre eux, on parle de configuration **en coin d'air**.

En considérant M1' (l'image de M1 par la séparatrice) et M2, la configuration lame d'air revient en fait à avoir M1' et M2 parallèles entre eux. C'est ce qui explique le nom à faces parallèles, alors que les miroirs réels M1 et M2 sont en réalité perpendiculaires.

### Configuration en lame d'air

Pour configurer l'interféromètre de Michelson en lame d'air, il suffit d'agir sur la distance  $d$  représentée sur le schéma, comme cela est indiqué dans la partie précédente.

La figure d'interférence observable est celle qui est représentée sur la figure ci-contre. On peut donc noter que l'on peut observer un ensemble d'anneaux concentriques, successivement sombres et clairs. On dit que la figure est constituée d'anneaux d'égale inclinaison.



Cas particulier de l'observation, lors du contact optique, c'est-à-dire lorsque la distance  $d$  est réduite à zéro on observe une figure d'interférence avec un contraste nul. On a donc une teinte unie. Cette mesure peut permettre de tester la planéité des miroirs utilisés.

Les maxima d'interférence se trouvent pour:

$$2d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda \quad (12.8)$$

L'ordre  $m$  augmente d'une unité quand  $d$  augment de  $\lambda/2$ .

Ou quand  $d$  varie, on verra les franges **défiler** de la quantité:

$$\Delta d = \frac{\Delta m \cdot \lambda}{2} \quad (12.9)$$

### Configuration en coin d'air

La configuration en coin d'air consiste à introduire un angle  $\alpha$  entre les deux miroirs, et donc obtenir un dispositif où M1 et M2 ne sont plus perpendiculaires.

La figure d'interférence, cette fois-ci, est composée de raies toutes parallèles. La direction de ces raie est celle de la droite d'intersection entre les plan M1' et M2 (Figure 12-3).

L'interfrange est donné par:

$$\Delta x = \frac{\lambda_f}{2\alpha} \quad (12.10)$$

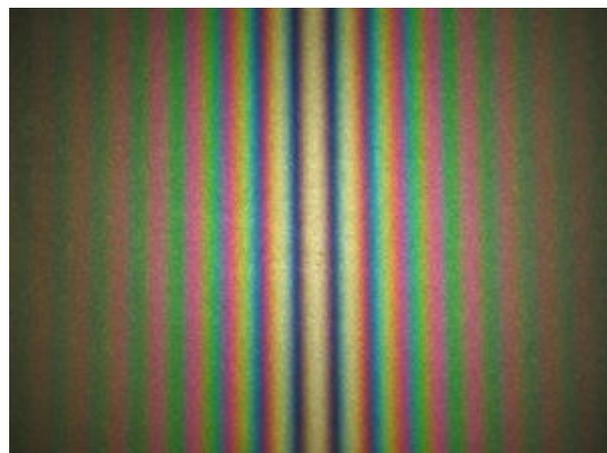


Figure 12-4: Figure d'interférence obtenue avec un interféromètre de Michelson en configuration coin d'air éclairé par une lampe blanche

## 12.5 EXERCICES

1. Lors d'une expérience de Young, une double fente de 0.2 mm de séparation est illuminée par une lumière monochromatique et produit des franges sur un écran à 1,5 m. La distance entre les cinquièmes minima de chaque côté est de 34,73 mm. Trouver la longueur d'onde de la lumière. **Rep.** 514,5 nm.
2. Une double fente est illuminée par une lumière bichromatique. Une des longueurs d'onde est 436 nm. Sur l'écran le quatrième maximum coloré à 436 nm coïncide avec le troisième de l'autre couleur. Quelle est la deuxième longueur d'onde ? **Rep.** 581 nm.
3. On a une source de longueur d'onde 600 nm et on configure l'appareil pour voir des franges circulaires. En bougeant un des deux miroirs le long de son axe on observe un défilement de 400 franges. De combien on a bougé le miroir ? **Rep.** 120  $\mu\text{m}$ .
4. En regardant à travers du séparateur d'un interféromètre de Michelson fonctionnant avec un faisceau de lumière collimatée, on voit 11 franges verticales dans un champ circulaire de diamètre 3 cm.  $\lambda$  est 550 nm. Quel est l'angle relatif des miroirs ? Quelle est la direction de l'axe de cette rotation ? **Rep.** 0.1 mrad, autour d'un axe vertical.



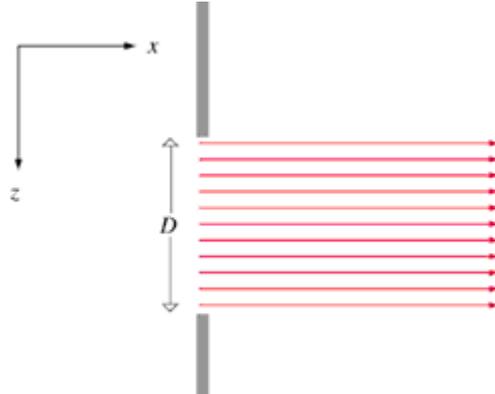
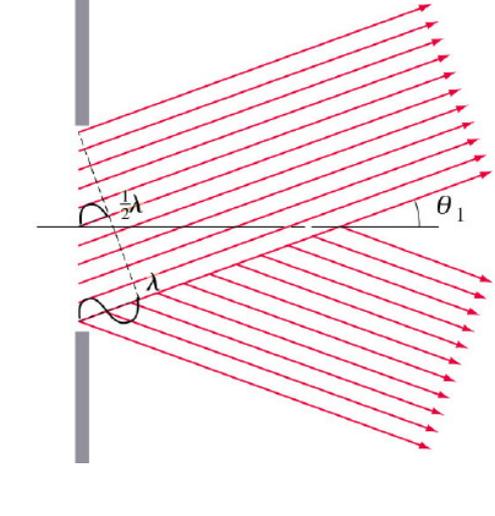
## 13. LA DIFFRACTION

On a vu plus haut que par la nature ondulatoire de la lumière l'interférence de deux sources lumineuses produit une alternance de franges sombres et illuminées sur un écran placé à une certaine distance.

Ce qui est plus intrigant est qu'on observe également une alternance de franges sombres et illuminées quand la lumière traverse **une seule fente**. Ceci peut être expliqué si on considère que la fente est constituée d'une série de nombreuses, très fines fentes adjacentes, chacune laissant traverser un faisceau très fin (à la limite de la « taille » d'un rayon).

### 13.1 DIFFRACTION PAR UNE FENTE

Considérons un faisceau de lumière monochromatique (en phase) passe à travers une fente étroite et longue de largeur  $D$ , et on place un écran de visualisation à grande distance. Selon le principe de Huygens les ondes qui passent par cette fente se propageront dans toutes les directions. Voyons comment elles peuvent interférer les unes avec les autres. Analysons séparément chaque direction possible.

<p>Cas 1) Les rayons passent en ligne droite. Comme ils sont en phase, ils forment un point brillant au centre de l'écran.</p>	
<p>Cas 2) Les rayons sont dirigés selon un angle <math>\theta_1</math> tels que la distance parcourue par le plus bas rayon de la fente est exactement une longueur d'onde de plus que celle parcourue par le plus haut rayon de la fente. La distance parcourue par le rayon passant par le centre est supérieure de <math>\lambda/2</math> à celle parcourue par le plus haut rayon de la fente: ces 2 rayons sont déphasés de <math>\lambda/2</math> et interfèrent destructivement.</p> <p>De même un rayon juste au-dessous du plus haut rayon annule le rayon correspondant juste au-dessous du rayon central, etc..</p> <p>Tous les rayons interfèrent donc destructivement un à un et aucune lumière dirigée selon cet angle n'atteint l'écran. L'angle auquel ces interférences se produisent est donné par:</p> $D \sin \theta_1 = \lambda.$ <p>La première paire de minima se produit donc pour</p> $\sin \theta_1 = \pm \lambda / D.$	

<p>Cas 3) Quand l'angle augmente, on trouve un second minimum quand</p> $D \sin \theta_2 = 2 \lambda.$ <p>Imaginons que l'ouverture soit divisée en 4 quarts.</p> <p>Si <math>\theta_2</math> est tel que les rayons de chaque quart sont en opposition de phase avec les rayons correspondant du quart suivant (ce qui arrive pour <math>\frac{1}{4} D \sin \theta_2 = \lambda / 2</math>) une interférence destructive se produit et il y a extinction de lumière.</p> <p>Et ainsi de suite ...</p>	
---	--

**Il n'y a aucune différence profonde entre l'interférence et la diffraction.**

En fait, les deux phénomènes sont inséparables, bien que nous tendions à parler d'eux séparément, parce que c'est ainsi que ces deux concepts se sont développés historiquement.

Pour une fente de largeur  $D$ , on a un éclairement nul si

$$D \sin \theta_m = m \lambda \quad \text{avec } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (13.1)$$

sauf en  $m = 0$  où se produit le maximum le plus fort.

On a des maxima d'éclairement pour

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad D \sin \theta_m = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad \text{avec } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (13.2)$$

Les minima d'éclairement se produisent pour

$$D \sin \theta_1 = \pm m \lambda / D \quad \text{avec } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (13.3)$$



Figure 13-1: Motif de diffraction causé par une fente sur un écran à une certaine distance. Si la fente devient plus étroite ( $D$  plus petit), la figure de diffraction s'élargit: le pic central devient plus large. On remarque bien le maximum central et ensuite les maxima secondaires, intercalés par les minima espacés régulièrement.

### 13.2 DIFFRACTION DE FRAUNHOFER ET DE FRESNEL

La représentation de la diffraction par une fente donnée au chapitre précédent correspond strictement au cas appelé **diffraction de Fraunhofer** ou **diffraction en champ lointain** ou **approximation de Fraunhofer**. Elle s'oppose à la **diffraction de Fresnel** qui décrit le même phénomène de diffraction mais en champ proche.

A l'opposé de l'approximation de Fresnel, l'approximation de Fraunhofer est plus facile à exprimer car elle simplifie l'expression du champ électrique diffracté en une somme d'ondes planes au niveau du plan d'observation (plan image, écran).

La raison en est que, selon le principe de Huygens, tout point de l'objet diffractant agit comme une source secondaire du rayonnement électromagnétique, émettant des ondes sphériques qui interfèrent entre elles. Or aux grandes distances, c'est-à-dire lorsqu'on se place en champ lointain, le rayon de courbure de ces ondes sortantes diffractées devient très grand, si bien que ces ondes peuvent être approximées par des ondes planes selon la direction du plan image: c'est la diffraction ou approximation de Fraunhofer. La diffraction de Fresnel, en champ proche, doit prendre en compte la courbure du front d'onde afin de rendre correctement le terme de phase des ondes interférentes.

La figure suivante illustre bien les deux phénomènes. Une ouverture carrée est éclairée par une onde plane d'un laser He-Ne. En (a), (b) (c) l'ouverture est grande et l'écran proche: la figure est compliquée intérieurement, mais sa forme générale est reconnaissable. Si on réduit l'ouverture, la figure s'étale dans les directions perpendiculaires à ses côtés (d), (e) et en (f) atteint sa limite, la réduction du trou ne fait qu'agrandir la figure mais ne change pas sa forme.

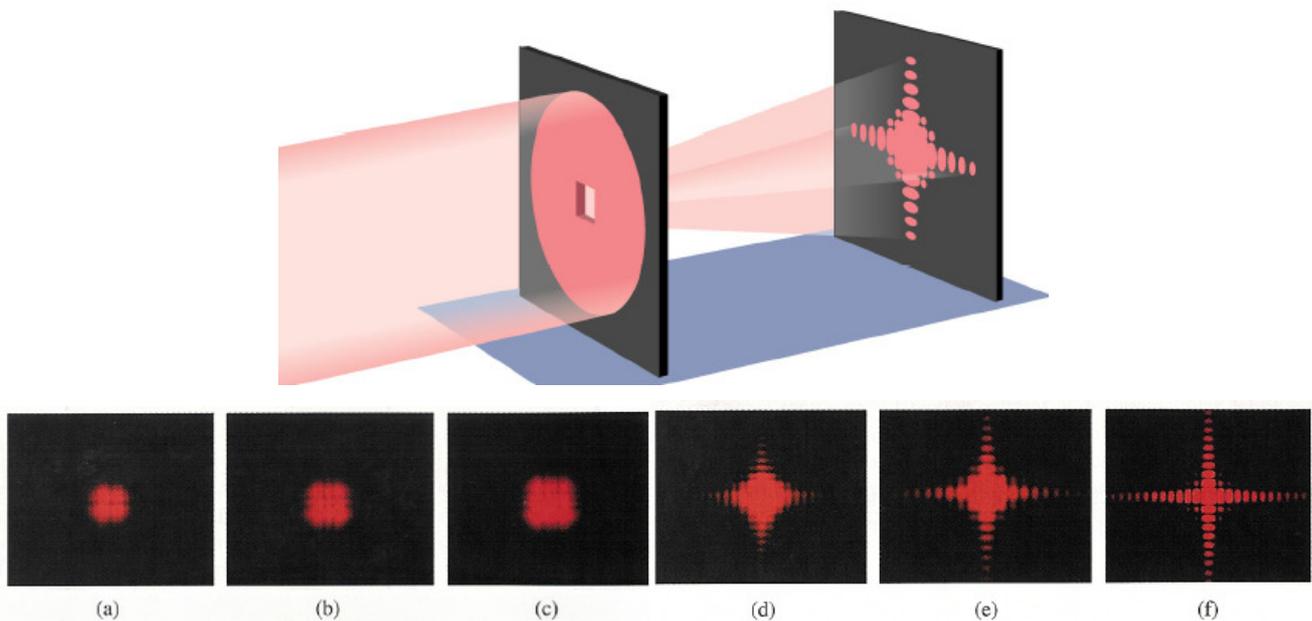


Figure 13-2: Illustration de la figure de diffraction d'une ouverture carrée projetée sur un écran plan à diverses distances de la source. Les images de (a) à (e) représentent une diffraction à distance finie ou diffraction de Fresnel, tandis que (f) correspond à une diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer.

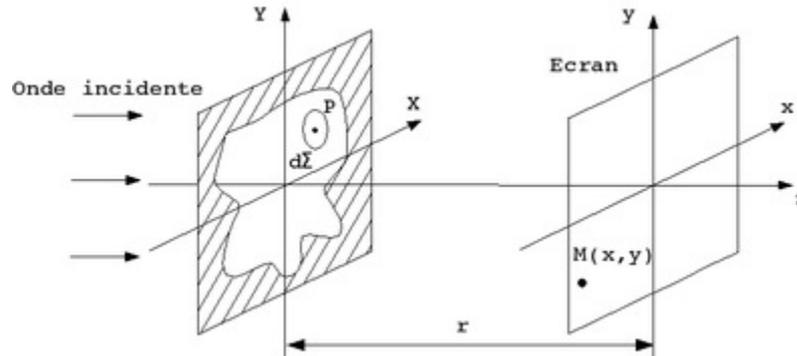
Si  $D$  est une dimension caractéristique de l'ouverture (ex: diamètre pour une ouverture circulaire), on se trouve dans les conditions de la diffraction de Fraunhofer si

$$N_f = \frac{D^2}{\lambda r} \ll 1$$

$d^2/\lambda r$  est parfois appelé **nombre de Fresnel**. Ici ensuite, nous ne considérerons que le cas de la diffraction de Fraunhofer à l'infini, où la lumière incidente est plane et l'écran est considéré à l'infini (quelques mètres, c'est pratiquement l'infini).

### 13.3 DIFFRACTION DE FRAUNHOFER PAR UNE OUVERTURE QUELCONQUE

On considère un faisceau d'ondes traversant une ouverture contenue dans le plan  $z = 0$ . Soit  $E(P) = E(X, Y)$  l'amplitude du champ d'ondes incidentes en un point P quelconque de l'ouverture, de coordonnées  $(X, Y)$ .



Lorsqu'elle arrive au point d'observation M, de coordonnées  $(x, y)$  dans le plan  $z = r$ , l'amplitude totale du champ en ce point M d'un plan à distance  $r$  de l'ouverture s'obtient en sommant les contributions de tous les points de l'ouverture, soit:

$$E(x, y) = \frac{e^{i(\alpha r - kr)}}{r} \iint_{\text{ouverture}} \varepsilon_A(X, Y) e^{ik(Xx+Yy)/r} dX dY \quad (13.4)$$

Le terme  $k$  est le nombre d'onde  $2\pi/\lambda$ .

La fonction complexe  $\varepsilon_A(X, Y)$  est appelée **vigueur de la source** (*source strength* en anglais) et est telle que pour des valeurs de  $r$  compatibles avec l'approximation de Fraunhofer, on a

$$E(X, Y) = \frac{1}{r} \iint_{\text{ouverture}} \varepsilon_A(X, Y) dX dY \quad (13.5)$$

On peut remarquer que l'amplitude du champ diffracté est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction  $\varepsilon_A(X, Y)$ .

Rappelons aussi - équation (11.5) - que le profil d'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude du champ  $E$ :

$$I(x, y) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |E(x, y)|^2 \quad (13.6)$$

En pratique les expressions (13.4) et (13.6) sont utilisées assez aisément pour calculer les profils d'éclairement relatifs à l'éclairement du point central  $I(0,0)$ .

Par contre le calcul de l'amplitude absolue de l'éclairement en fonction de l'illumination de la fente n'est pas aisé parce que le champ (électrique) intégré sur des dimensions spatiales ne représente pas une quantité conservative comme l'énergie ou la puissance. Il sera généralement nécessaire de **normaliser le profil d'éclairement** de manière telle à respecter le principe de conservation de l'énergie:

$$\iint_{\text{ouverture}} |E(X, Y)|^2 dX dY = \iint_{-\infty}^{\infty} |E(x, y)|^2 dx dy \quad (13.7)$$

### 13.4 DIFFRACTION DE FRAUNHOFER AU FOYER D'UN SYSTEME OPTIQUE

La diffraction de Fraunhofer n'est en principe valable qu'à l'infini. En pratique, observer à l'infini signifie être assez loin de l'objet diffractant pour que le nombre de Fresnel soit très inférieur à 1.

Mais il est aussi possible de « ramener » l'infini en se plaçant au foyer image d'une lentille. En effet on peut montrer que le profil de diffraction de Fraunhofer est aussi valable **au plan focal image d'une lentille**.

En effet la lentille transforme des directions en points dans le plan focal. C'est-à-dire que tous les rayons parallèles d'un certain angle sont focalisés sur un certain point.

Dans ce dernier cas, la distance  $r$  de la figure suivante doit être remplacée par la distance focale de la lentille  $f$ , dans les formules de l'approximation de Fraunhofer.

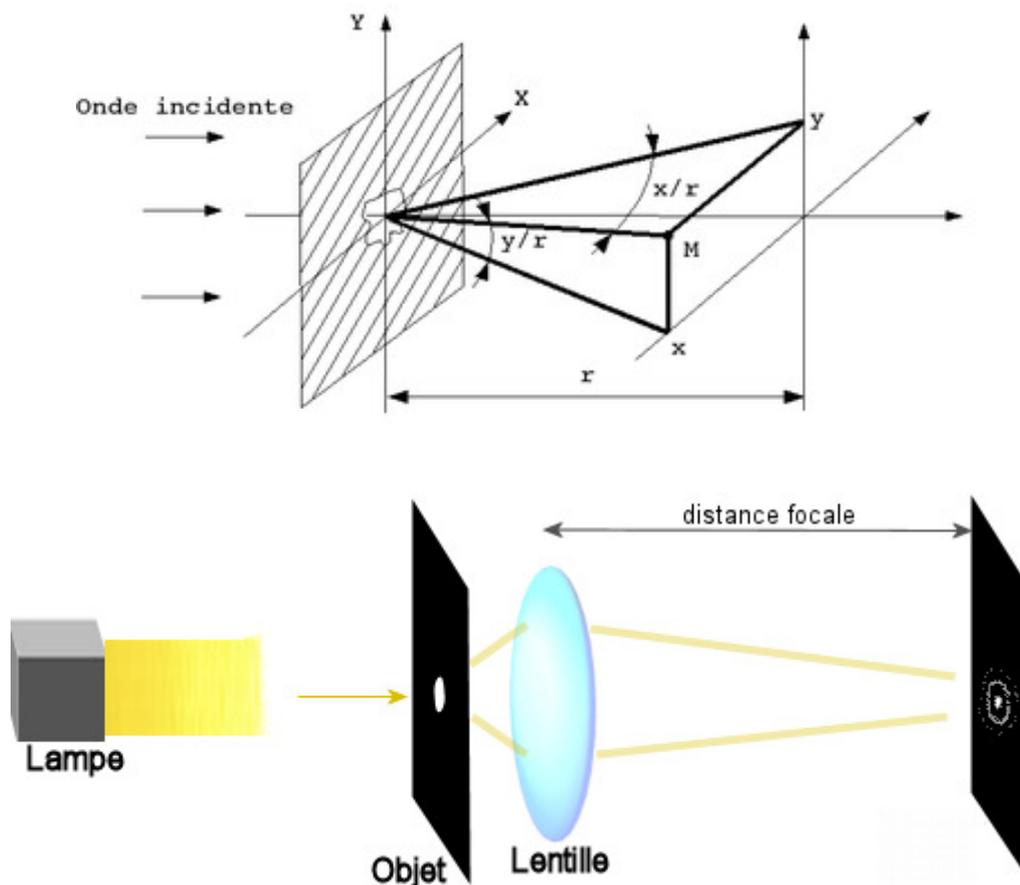
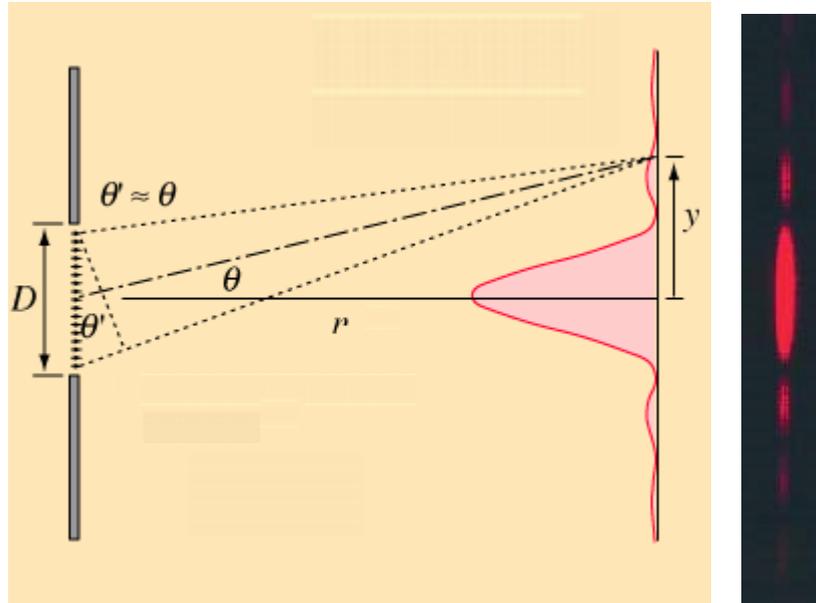


Figure 13-3: L'approximation de Fraunhofer est valable pour un écran situé à une grande distance  $r$  de l'ouverture diffractante (figure en haut), mais représente aussi la figure de diffraction au foyer d'une lentille convergente placée après l'ouverture (figure en bas).

### 13.5 PROFIL D'ÉCLAIREMENT DE LA DIFFRACTION DE FRAUNHOFER PAR UNE FENTE

Revenons au cas de la diffraction par une fente dans une dimension (où on supposera que la fente à une hauteur infinie) dans l'approximation de Fraunhofer.



On a vu qu'on trouve les maxima d'éclairement pour

$$\theta = 0 \text{ et } \sin \theta_m \approx \theta_m = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{D} \text{ avec } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad (13.8)$$

les minima d'éclairement sont à

$$\sin \theta_m \approx \theta_m = \frac{m\lambda}{D} \text{ avec } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (13.9)$$

La divergence de la tache centrale est donc

$$\theta_{div} = 2 \cdot \theta_{1min} = 2 \frac{\lambda}{D}. \quad (13.10)$$

On peut démontrer à partir des relations (13.4) et (13.6) que le profil d'éclairement du motif de diffraction (franges) provoqué par une fente de largeur  $D$  sur un écran distant  $r$  sera donné par

$$I(\theta) = I(0) \cdot \text{sinc}^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta \right) = I(0) \cdot \text{sinc}^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D}{r} y \right) \quad (13.11)$$

ou sinc est la fonction sinus cardinal définie par  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  et  $I(0)$  est l'éclairement enregistré au centre du motif sur l'écran. Ce profil est tracé à la Figure 13-4.

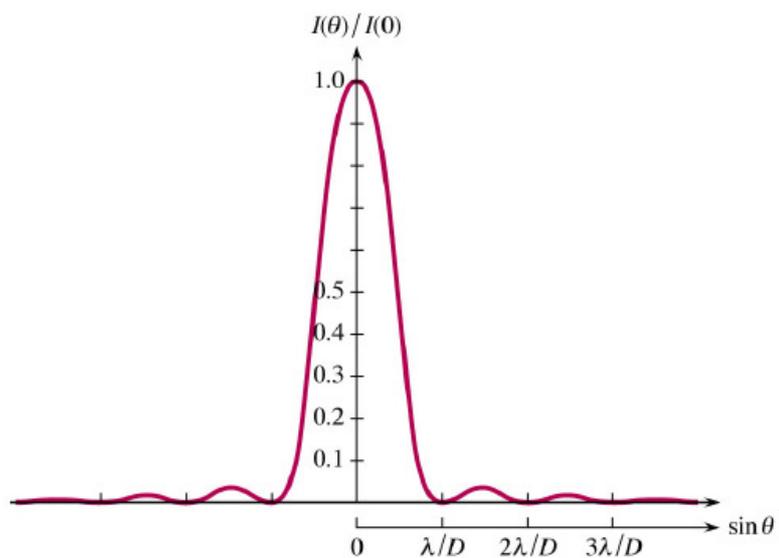


Figure 13-4: Profil d'éclairement du motif de diffraction causé par une fente de largeur  $D$ . Si la fente devient plus étroite ( $D$  plus petit), la figure de diffraction s'élargit; le pic central devient plus large.

### 13.6 CALCUL EXACT DU MOTIF D'INTERFERENCE PAR UNE DOUBLE FENTE

L'expression (12.6) donnait le profil d'éclairement des franges formées par une double fente de Young, calculée uniquement sur la base de la différence de marche des rayons.

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{a\pi y}{r\lambda} \tag{12.6}$$

$r$  étant ici la distance entre la double fente et l'écran.

Nous allons maintenant réviser ce calcul en tenant compte aussi des effets de la diffraction. En effet, les fentes ont une certaine largeur, ce qui implique un phénomène de diffraction par chacune des fentes. La lumière envoyée par chaque fente n'en ressort pas de façon isotrope, mais avec le profil de la Figure 13-4. Cet effet se répercute sur la figure observée après les fentes de Young: l'éclairement des franges décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre.

Faisant référence à la Figure 12-1, page 12-1, pour en tenir compte, il faut pondérer avec le facteur de l'équation (13.8) dû à la diffraction des fentes à l'éclairement reçu par l'écran:

$$\text{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{D y}{r}\right)$$

où *sinc* est la fonction sinus cardinal et  $D$  est la largeur de chaque fente.

Le second phénomène à prendre en compte est le fait que les ondes émises en  $S_1$  et  $S_2$  sont des ondes *sphériques*, c'est-à-dire que leur amplitude décroît au fur-et-à-mesure qu'elles avancent. Ainsi l'amplitude de  $E_1$  et de  $E_2$  ne sera pas la même au point  $M$ . Cela donnera un nouveau facteur à rajouter à l'éclairement:

$$\frac{1}{r^2 + y^2}$$

On a donc au final

$$I = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{a\pi y}{\lambda r} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D y}{\lambda r}\right) \cdot \frac{1}{r^2 + y^2} \tag{13.12}$$

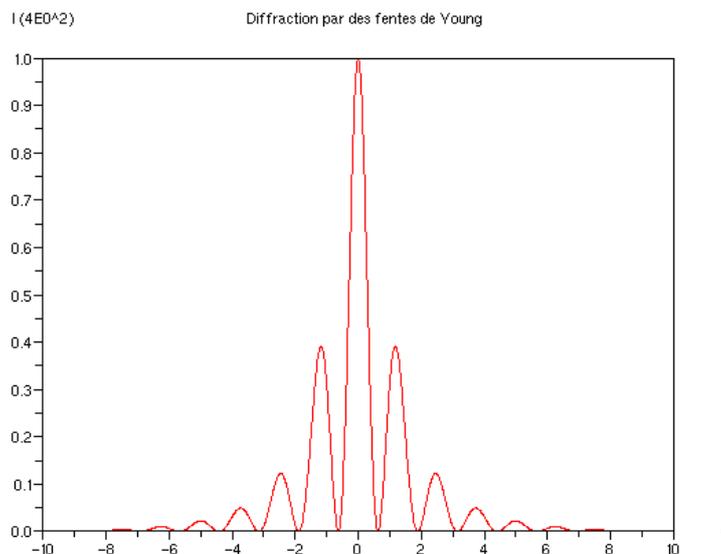


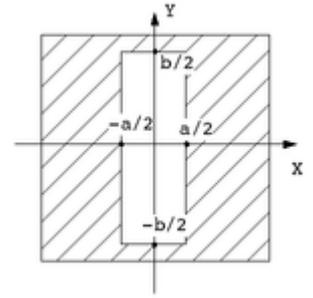
Figure 13-5: Simulation d'un profil d'éclairement avec une longueur d'onde  $\lambda = 630$  nm (rouge), une distance entre les fentes  $a = 0,5$   $\mu\text{m}$ , une distance fente-écran  $s = 1$  m et une largeur de fente de  $0,05$   $\mu\text{m}$ .

### 13.7 DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE RECTANGULAIRE

Une ouverture rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  correspond à une fonction d'ouverture  $E(X, Y)$  définie par:

$$E(X, Y) = 1 \text{ si } |X| < a/2 \text{ et } |Y| < b/2$$

$$E(X, Y) = 0 \text{ dans tous les autres cas de } X \text{ et } Y.$$



Le calcul de l'éclairement diffracté par une telle ouverture, c'est-à-dire du carré du module de l'amplitude du champ  $E$ , donne:

$$I(x, y) = |E(x, y)|^2 = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi x a}{\lambda r}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi y b}{\lambda r}\right) \tag{13.13}$$

Dans cette expression,  $I_0$  correspond à l'éclairement maximale sur l'écran (au centre) et *sinc* est la fonction sinus cardinal définie par  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

La figure ci-contre est une simulation de la figure de diffraction de Fraunhofer obtenue avec une ouverture rectangulaire de côtés  $a = 0,1 \text{ mm}$  et  $b = 0,3 \text{ mm}$ . On a pris  $\lambda = 500 \text{ nm}$  et on s'est placé au foyer image d'une lentille de distance focale  $f = 1 \text{ m}$ .

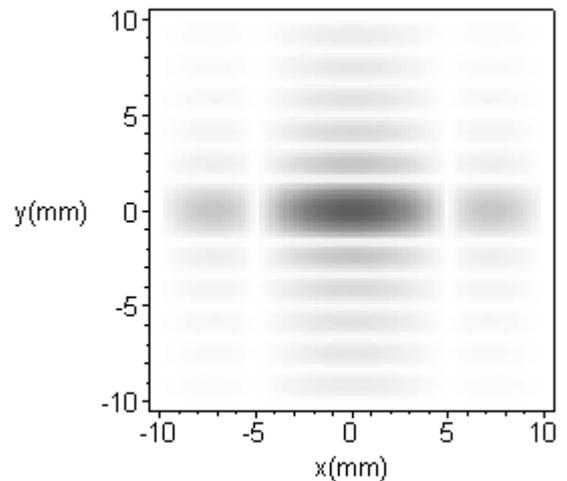
L'éclairement des maxima secondaires a été artificiellement rehaussée afin de les rendre plus visibles.

En l'absence de diffraction, la figure obtenue aurait simplement été un point brillant au centre de l'écran correspondant à la focalisation par la lentille des rayons incidents parallèles à l'axe.

On remarque que le côté le plus petit correspond au plus grand étalement de la lumière. En effet, les dimensions de la tache centrale sont:

$$\Delta x = 2 \frac{\lambda f}{a} = 10 \text{ mm}$$

$$\Delta y = 2 \frac{\lambda f}{b} = 3,3 \text{ mm}$$



### 13.8 DIFFRACTION DUE A UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

Une ouverture circulaire de diamètre  $D$  produit un cercle (spot) très lumineux, encerclé par une alternance d'anneaux sombres et illuminés. La figure obtenue est appelée **tache d'Airy**.

L'éclairement donné par la diffraction de Fraunhofer est

$$E(\theta) = E_0 \left( \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel<sup>13</sup> du premier ordre, et

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

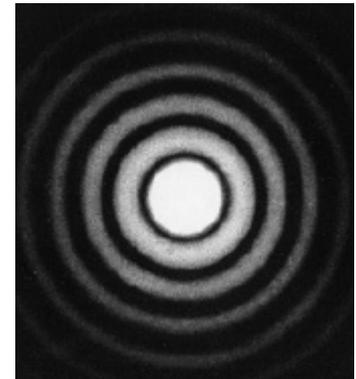
Le premier zéro de  $J_1(x)$  correspond à  $x = 3.831705970 \simeq 3.83$ .

Ainsi le premier minimum angulaire de la figure de diffraction, qui est conventionnellement pris comme la **taille angulaire de la tache d'Airy** de la correspond à

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (13.14)$$

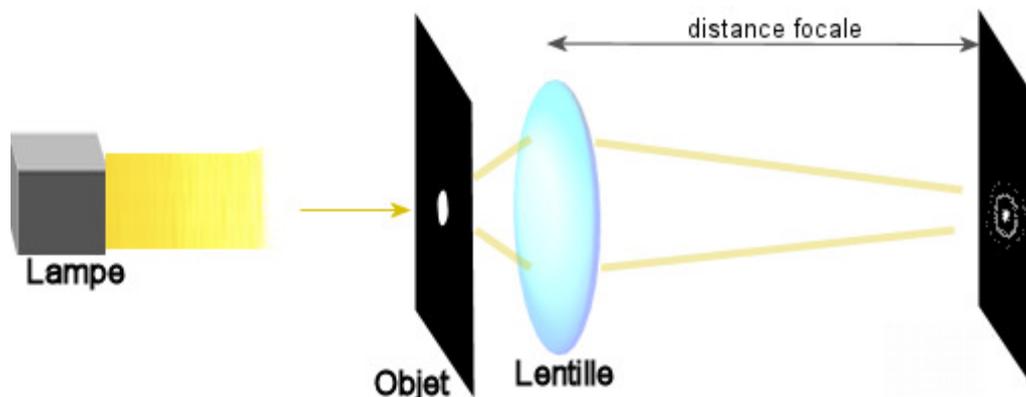
où  $D$  est le diamètre du trou et  $a$  son rayon.

La mi-hauteur du pic central ( $J_1(x) = 1/2$ ) est atteinte pour  $x = 1.61633$ .



### 13.9 TACHE D'AIRY AU FOYER D'UN SYSTEME OPTIQUE

Le profil de diffraction de Fraunhofer est aussi valable au plan focal image d'une lentille.



Ainsi si on ajoute une lentille convergente après l'objet, on peut observer sur un écran placé au foyer de la lentille le motif diffracté selon l'approximation de Fraunhofer. Chaque rayon diffracté dans la direction  $\theta$  génère ainsi un point sur un écran placé dans le plan focal de lentille à une distance  $f \cdot \theta$  depuis l'axe.

Le **rayon de la première frange sombre** de la tache d'Airy - conventionnellement pris comme la taille sur l'écran de la tache d'Airy - se trouvera ainsi à la distance (mesurée depuis le centre de l'écran):

$$r_a = 1.22 \frac{f \lambda}{D} \quad (13.15)$$

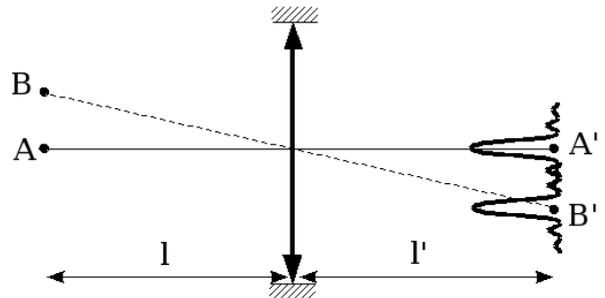
<sup>13</sup> Pour la définition de la fonction de Bessel, consulter pare exemple « Fonction de Bessel » sur Wikipédia.

### 13.10 RÉSOLUTION D'UN INSTRUMENT D'OPTIQUE

Le rôle de la plupart des instruments d'optique (microscope, objectif d'appareil photo, télescope...) est de former des images. Du point de vue de l'optique géométrique, un instrument « parfait », c'est-à-dire exempt d'aberrations, fait correspondre à un **point objet un point image**.

En réalité, lors leur cheminement à travers l'instrument, les faisceaux lumineux sont diaphragmés par les montures des lentilles et donc diffractés. L'image d'un point source par un instrument dépourvu d'aberrations n'est donc pas un point image mais une tache de diffraction. On peut montrer que la répartition d'éclairement dans le plan de l'image est donnée par les formules de diffraction de Fraunhofer.

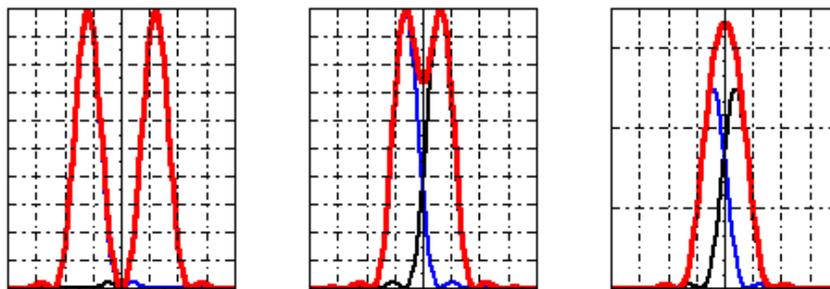
Les montures des lentilles ou miroirs étant la plupart du temps circulaires, la figure de diffraction obtenue est une tache d'Airy décrite dans le paragraphe précédent.



Ainsi, deux points objets rapprochés peuvent donner deux images trop proches pour être distinguées si la distance entre ces images est du même ordre de grandeur que la taille de la tache de diffraction.

On appelle **résolution** l'écart minimal entre deux points objets pour qu'on puisse les distinguer avec l'instrument d'optique considéré.

Quantitativement, on utilise le **critère de Rayleigh** selon lequel deux images A' et B' correspondant à deux points A et B sont distinctes si le sommet de la tache de diffraction de l'une correspond au premier minimum nul de l'autre.



Les courbes bleues et noires montrent les éclairements correspondant aux taches de diffraction de A' et B'. Les courbes rouges représentent l'éclairement totale telle que perçue par un détecteur. Si A' et B' sont suffisamment éloignés (figure de gauche), les deux images sont nettement séparées. S'ils sont trop proches (figure de droite), on ne distinguera qu'une seule tache. Le brouillage des deux images se produit approximativement lorsque le maximum d'une tache de diffraction correspond au premier minimum de l'autre.

Prenons le cas simple de la formation d'une image par une lentille mince de diamètre  $d$ . On note  $p$  la distance objet-lentille et  $p'$  la distance lentille-image. A' et B' sont séparés si

$$A'B' > 1.22 \frac{\lambda}{D} p'$$

Comme  $AB = A'B' \cdot \frac{p}{p'}$ , la condition précédente devient:

$$AB > 1.22 \frac{\lambda}{D} p \tag{13.16}$$

En pratique, le rapport  $p/D$  est toujours  $\geq 1$ . La résolution est donc au mieux du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la lumière utilisée, entre 0,4 et 0,8 micromètres pour la lumière visible. Ceci explique par exemple pourquoi un microscope optique ne peut pas distinguer des détails inférieurs à quelques dixièmes de micromètres.

Des résolutions bien meilleures peuvent par exemple être obtenues avec des microscopes électroniques. D'autre part, la résolution s'améliore lorsque le diamètre de l'optique qui produit l'image augmente. C'est pourquoi les miroirs des télescopes font jusqu'à plusieurs mètres de diamètre.

### 13.11 RESEAUX DE DIFFRACTION

Une des plus importantes applications de la diffraction est la spectrographie (ou spectrométrie), basée sur les motifs d'interférence produits non par une ou deux fentes mais par un très grand nombre de fentes adjacentes. Ces composants sont appelés **réseaux de diffractions** (*diffraction gratings* en anglais).

Un réseau est constitué par un très grand nombre de fentes  $N$  parallèles et équidistantes (distances entre les fentes de  $a$ ). On a toujours une diffraction par chaque fente et dans la région commune aux pics centraux de toutes ces fentes, on trouve des maxima aux mêmes positions que dans l'expérience de Young; mais ces maxima principaux sont plus étroits et les maxima secondaires sont de faible intensité. Pour  $N$  très grand, il ne reste plus que des maxima de brillance très nets et étroits.

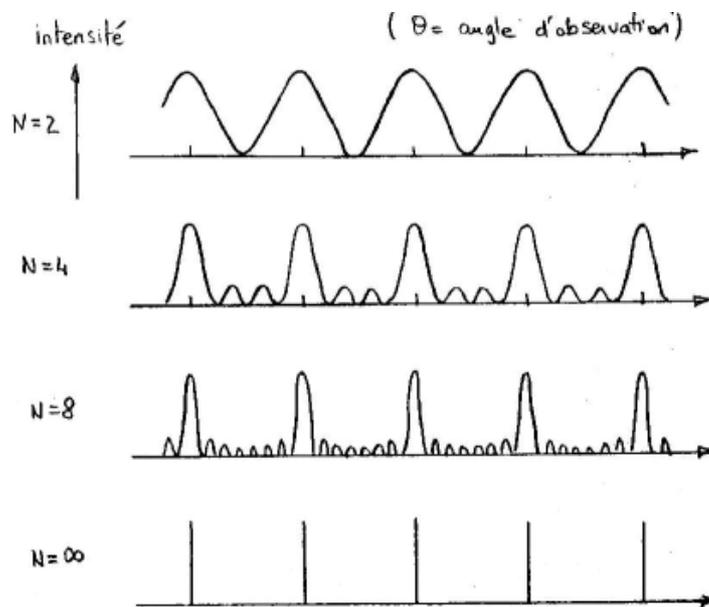


Figure 13-6: Profil d'éclairement du motif de diffraction causé par l'interférence d'un nombre croissant de fentes. Plus  $N$  est grand, plus les franges sont séparées et étroites.

L'analyse d'un réseau de diffraction est très semblable à celle de l'expérience de Young. Comme dans le cas de deux fentes, les maxima d'interférence seront produits dans les directions

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (13.17)$$

$a$  étant l'espacement entre les fentes et  $m = 0, 1, 2, \dots$

Par contre, dans un réseau de diffraction ces maxima ne se présentent pas en forme de larges bandes mais plutôt comme des raies très fines et très brillantes. La largeur d'une bande diminue avec le nombre de fente  $N$ :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Na \cos \theta_m} \quad (13.18)$$

### 13.12 SPECTROGRAPHIE PAR RÉSEAUX DE DIFFRACTION

Toute matière émet de la radiation électromagnétique à des longueurs d'onde particulières, qui sont caractéristiques de chaque substance. Ainsi le spectre d'émission est un important outil d'analyse dans beaucoup de domaines, de la chimie à l'astrophysique.

La lumière émise par un échantillon d'une substance ou source lumineuse peut être caractérisée dans ses longueurs d'onde en la faisant traverser un réseau de diffraction, prenant avantage du fait que la direction de chaque maximum d'interférence dépend de la longueur d'onde. En général plus d'un spectre complet est généré, un pour chaque ordre  $m$  d'interférence.

On peut tracer des réseaux calibrés de 10000 lignes par centimètre en utilisant une plaque de matériau transparent gravé avec une pointe fine de diamant, par exemple. La plupart des réseaux sont des copies en plastique d'un réseau calibré et ils peuvent être soit des réseaux transparents, utilisés en **transmission**, soit métallisés et utilisés en **réflexion**.

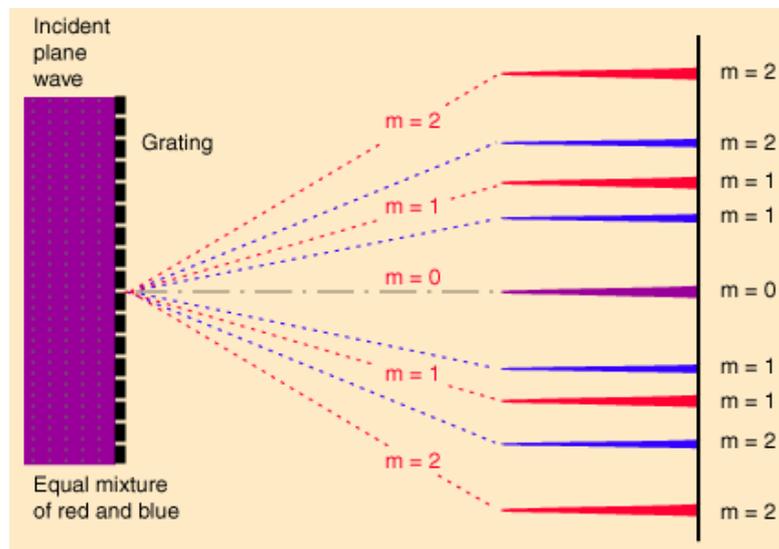


Figure 13-7: Dans cette illustration un réseau est utilisé pour séparer une lumière constituée de deux longueurs d'onde, respectivement rouge et bleue.

Dans un spectrographe on calcule la longueur d'onde d'une émission de lumière en mesurant la direction de la raie lumineuse correspondante. Dans la pratique, une incertitude sur cette direction produira donc une incertitude sur la longueur d'onde:

$$\Delta\lambda = \left| \frac{d\lambda}{d\theta} \right| \Delta\theta \quad (13.19)$$

Deux propriétés de réseau vont contribuer à  $\Delta\lambda$ .

La première est la **dispersion** (ou **pouvoir dispersif**) du réseau,

$$D = \left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| \quad (13.20)$$

L'autre est la **séparation minimum**  $\Delta\theta$  entre deux raies que le réseau peut **résoudre**.

En différentiant l'équation (2.7) on obtient

$$D = \frac{m}{a \cos \theta} \quad (13.21)$$

Ainsi une petite séparation du réseau diminue l'incertitude  $\Delta\lambda$ .

Une ultérieure contribution à l'incertitude de  $\lambda$  découle de la largeur finie des raies. Ainsi si deux raies sont si proches en longueur d'onde que leur séparation est moins que leur demi-moitié, elles seront en pratique confondues. Des équations (13.9), (13.10) et (13.11) on déduit

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\theta}{D} = \frac{\lambda}{Na \cos \theta} \cdot \frac{a \cos \theta}{m} = \frac{\lambda}{mN} \quad (13.22)$$

La **résolution** du spectrographe, aussi appelé pouvoir de résolution est défini comme

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \quad (13.23)$$

### 13.13 EXERCICES

1. **Tache d'Airy.** Un laser envoie depuis la Terre un faisceau de 2 mm de diamètre vers la Lune, à une distance de 380'000 km. Quelle est la taille de la tache lumineuse sur la surface de la Lune ?
2. **Réseaux de diffraction.** On illumine un réseau en transmission contenant 2000 traits/cm avec de la lumière contenant un petit domaine de longueurs d'ondes autour de 500 nm. Calculez:
  - a. L'angle  $\theta$  auquel on trouve la raie de 500 nm du premier ordre.
  - b. Le pouvoir dispersif autour de cette raie.
  - c. Le nombre absolu de fentes si le réseau a une largeur totale de 30 mm.
  - d. Le pouvoir de résolution du réseau dans le spectre de premier ordre.

## 14. LA POLARISATION

La polarisation est une direction privilégiée d'un vecteur caractérisant une radiation ou une particule, par rapport à leur direction de propagation ou un champ extérieur, avec lequel elles interagissent. En particulier, la polarisation est une propriété des ondes transverses telles que la lumière, ce qui les différencie des autres types d'ondes longitudinales comme les ondes sonores.

La manifestation la plus simple de polarisation est celle d'une onde plane, qui est une bonne approximation de la plupart des ondes lumineuses. Comme toute onde électromagnétique qui se propage, elle est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique tous deux perpendiculaires à la direction de propagation:

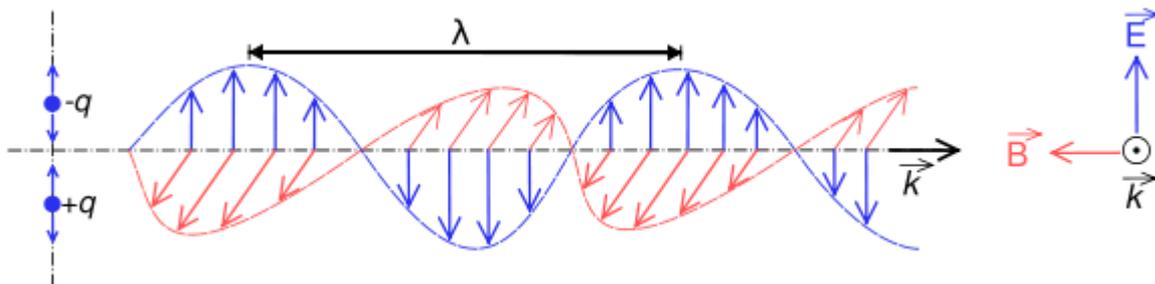


Figure 14-1: Onde lumineuse avec champ magnétique  $\vec{B}$  et champ électrique  $\vec{E}$  à angle droit l'un de l'autre (dans le cas d'une polarisation rectiligne).

La polarisation dénote conventionnellement la direction du champ électrique  $\vec{E}$ .

Pour une onde non polarisée, ou naturelle,  $E$  tourne autour de son axe de façon aléatoire et imprévisible au cours du temps. Polariser une onde correspond à donner une trajectoire définie au champ électrique.

Il y a plusieurs sortes de polarisation:

- La **polarisation linéaire** quand  $E$  reste toujours dans le même plan (Figure 14-1).
- La **polarisation elliptique**,  $E$  tourne autour de son axe et change d'amplitude pour former une ellipse. Comme cas particulier on a la **polarisation circulaire**,  $E$  tourne autour de son axe en formant un cercle.

Ces régimes s'obtiennent quand deux (ou plus) champs  $E_1$  et  $E_2$  (chacun à polarisation rectiligne) se somment avec des différences de phase et d'amplitude. Lorsque les deux composantes oscillent en phase, on obtient une polarisation rectiligne. Si elles présentent un déphasage (c'est-à-dire que l'une est en retard par rapport à l'autre), alors on obtient une polarisation elliptique.

Dans le cas particulier où ce déphasage vaut  $90^\circ$  et que les deux composantes  $E_1$  et  $E_2$  ont même amplitude, la polarisation est circulaire. On distingue alors les cas de polarisation circulaire gauche et circulaire droite selon le sens de parcours.

## 14.1 LES POLAROÏDS

Un **polariseur rectiligne** est un dispositif qui ne transmet que la composante de  $E$  parallèle à un axe privilégié appelé axe du polariseur. Les plus courants sont les **polaroïds**. Ils contiennent de longues chaînes polymères (hydrocarbures) parallèles sur lesquelles on fixe des atomes présentant un imposant nuage électronique, en l'occurrence de l'iode. Cela assure une certaine conduction électrique parallèlement aux chaînes.

Or nous avons vu que les ondes lumineuses ne se propagent pas dans les milieux conducteurs. Le **polaroïd** est en quelque sorte un milieu conducteur anisotrope, conducteur dans une direction et isolant dans la direction perpendiculaire. Le champ électrique ne pourra donc pas se propager dans la direction conductrice des chaînes hydrocarbonées, mais par contre se propagera dans la direction isolante qui est perpendiculaire. A la sortie de ce milieu, l'onde lumineuse sera polarisée rectilignement.

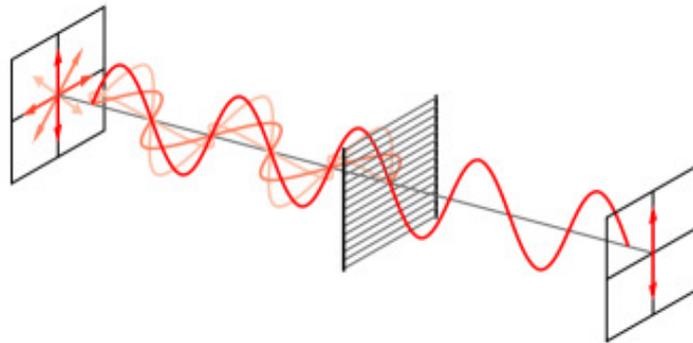


Figure 14-2: Un polariseur de type polaroïd convertit un faisceau présentant plusieurs polarisations en un faisceau polarisé rectilignement.

## 14.2 LOI DE MALUS

Considérons une onde polarisée rectilignement arrivant sur un polariseur parfait et dont la polarisation fait un angle  $\theta$  avec l'axe de ce polariseur. La loi de Malus donne la fraction de l'intensité de cette onde passant à travers le polariseur. En notant  $I_0$  l'intensité de l'onde incidente et  $I$  l'intensité de l'onde transmise, la **loi de Malus** s'écrit

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (14.1)$$

Par cet effet, une lumière non-polarisée comme celle du soleil ou des lampes habituelles verra son intensité diminuée de moitié. En effet, une lumière non-polarisée est constituée en réalité de toutes les directions de polarisation possible. Il faut donc prendre la moyenne de la loi de Malus, c'est-à-dire

$$I = \frac{I_0}{2} \quad (14.2)$$

En pratique on n'obtient pas 50% de transmission car les polariseurs ne sont pas parfaits et filtrent une partie de la lumière: typiquement les polaroïds transmettent 30-38% du rayonnement incident. Seuls certains prismes biréfringents en transmettent 49,9%. De plus, les polariseurs laissent passer un peu de lumière de polarisation non désirée.

## 14.3 POLARISATION PAR RÉFLEXION

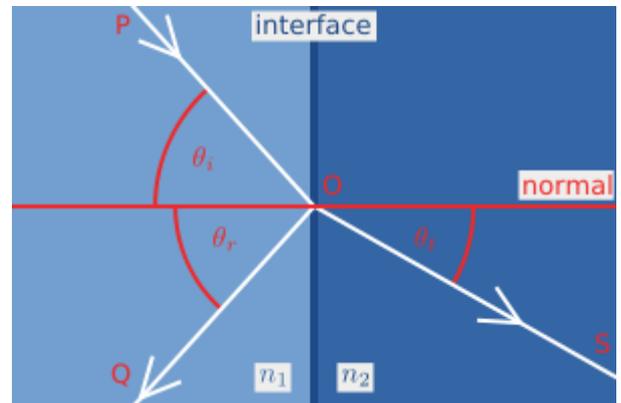
### 14.3.1 Les équations de Fresnel

Quand la lumière passe d'un milieu d'indice  $n_1$  à un autre d'indice  $n_2$ , en général il en résultera à la fois des phénomènes de réfraction et réflexion.

Les **équations de Fresnel** expriment les liens entre les amplitudes des ondes réfléchies et transmises par rapport à l'amplitude de l'onde incidente. Pour cela on introduit le coefficient de réflexion en puissance  $R$  et le coefficient de transmission en puissance  $T$ .

En général, ces coefficients dépendent:

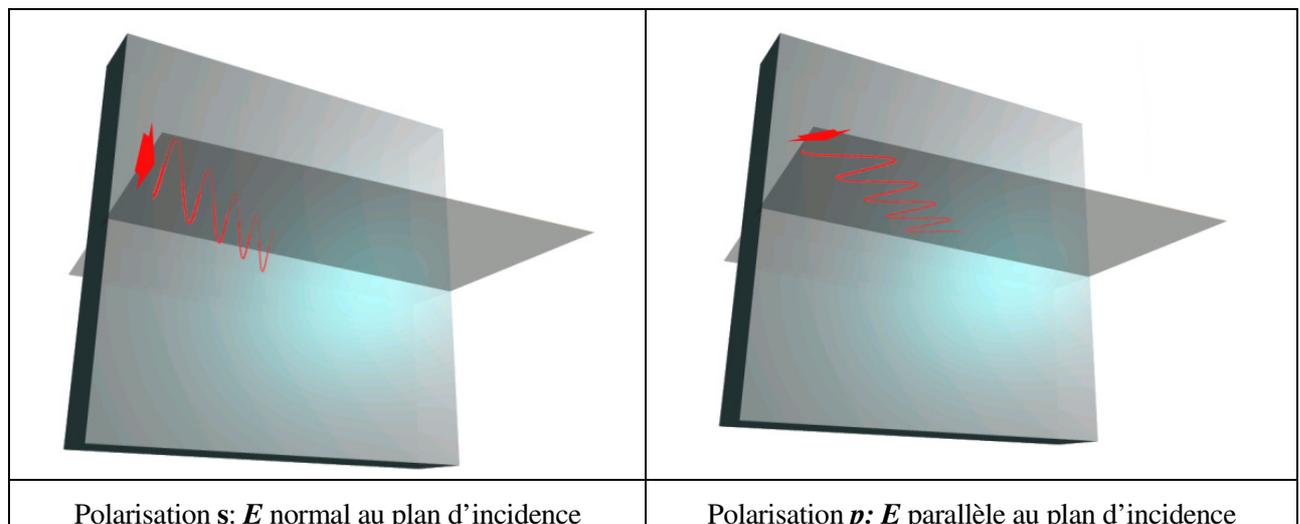
- des indices des milieux d'entrée et de sortie, respectivement  $n_1$  et  $n_2$
- des angles d'incidence  $\theta_i = \theta_1$  et de réfraction-transmission  $\theta_t = \theta_2$ ,
- de la polarisation des ondes. Ce qui amène à une polarisation éventuelle d'une onde initialement non polarisée.



Ils sont obtenus en considérant les relations de continuité à l'interface des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques associés à l'onde.

Les coefficients de réflexion et transmission dépendent de la polarisation de l'onde incidente en rapport avec le plan de la surface d'incidence. On considère les deux cas suivants de polarisation rectiligne:

1.  **$E$  normal au plan d'incidence:** l'onde (c.a.d. le champ électrique) incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (en conséquence le champ magnétique est contenu dans le plan d'incidence). Cet état est aussi appelée polarisation *s* (*senkrecht* en allemand).
2.  **$E$  parallèle au plan d'incidence:** l'onde incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. Cet état est aussi appelée polarisation *p* (parallèle).



Les coefficients de réflexion en puissance, aussi appelée **reflectances**, sont différents pour les deux cas de polarisation est sont donnés par les équations de Fresnel:

$$R_s = \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left[ \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \right]^2 \quad (14.3)$$

$$R_p = \left[ \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left[ \frac{n_1 \cos(\theta_t) - n_2 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)} \right]^2$$

Les **transmittances** dans chaque cas sont données par

$$T_s = 1 - R_s \quad \text{et} \quad T_p = 1 - R_p \quad (14.4)$$

La lumière "ordinaire" ou naturelle est en général non-polarisée, c'est-à-dire que le champ électrique est orienté en moyenne de façon arbitraire et reste selon une orientation particulière pour des intervalles de temps trop petits pour être mesurés. Comme on peut considérer qu'elle contient un mix de polarisation *s* et *p*, sa réflexion est décrite par la moyenne des réflectances  $R_s$  et  $R_p$

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad (14.5)$$

Pour un angle d'incidence particulier à chaque combinaison de  $n_1$  et  $n_2$ , la valeur de  $R_p$  (eq. 14.3) tombe à zéro et donc un rayon incident entièrement polarisé *p* est entièrement réfracté. Cet angle est connu comme l'**angle de Brewster** et est donné par

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (14.6)$$

L'angle de Brewster est d'environ  $56^\circ$  pour le verre dans l'air ou le vide.

Si une lumière naturelle non polarisée est incidente à cet angle, il en résultera que le rayon réfléchi sera **entièrement polarisé en s** et le rayon réfracté aura un certain degré de polarisation *p*.

### 14.3.2 Polariseurs par réflexion et séparation de faisceau

Les polariseurs par séparation de faisceau exploitent les phénomènes décrits par les équations de Fresnel et séparent le faisceau incident en deux faisceaux de polarisations différentes. Ils absorbent très peu la lumière, ce qui en fait un avantage par rapport aux polariseurs par polaroïd. Ils sont aussi utiles dans le cas où les deux faisceaux séparés sont nécessaires.

La façon la plus simple d'en réaliser consiste en une série de lames de verres orientées à l'**angle de Brewster** par rapport au faisceau. A cet angle, valant environ  $57^\circ$  pour le verre, la lumière polarisée *p* (c'est-à-dire parallèlement au plan d'incidence) n'est pas réfléchie par le verre et 16% de la lumière polarisée *s* (perpendiculairement au plan d'incidence) est réfléchie.

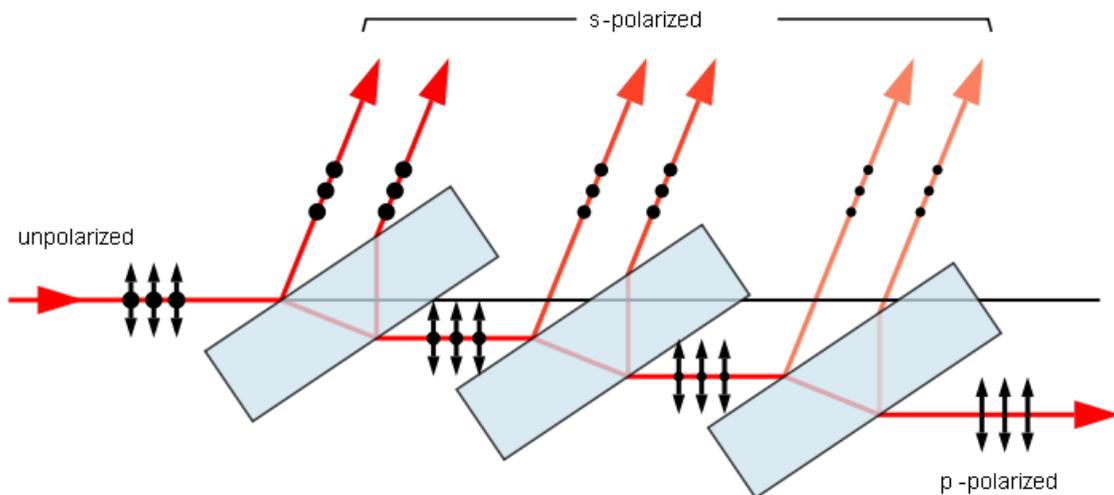


Figure 14-3: Schéma d'un polariseur par séparation de faisceau.

## 14.4 POLARISATION PAR BIRÉFRINGENCE

La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage de façon anisotrope. Dans un milieu biréfringent, l'indice de réfraction n'est pas unique, il dépend des directions de propagation et de polarisation du rayon lumineux.

Un effet spectaculaire de la biréfringence est la double réfraction par laquelle un rayon lumineux pénétrant dans le cristal est divisé en deux.

Certains polariseurs exploitent la biréfringence de certains matériaux comme le quartz, la calcite et le spath d'Islande. Ces cristaux ont la particularité de diviser un faisceau non polarisé en deux faisceaux polarisés différemment: il existe **deux angles de réfraction**, d'où le terme de biréfringence.

On parle alors d'un **rayon ordinaire** noté *o* et d'un **rayon extraordinaire** noté *e*, auxquels on associe deux indices  $n_o$  et  $n_e$  qui sont caractéristique du matériaux.

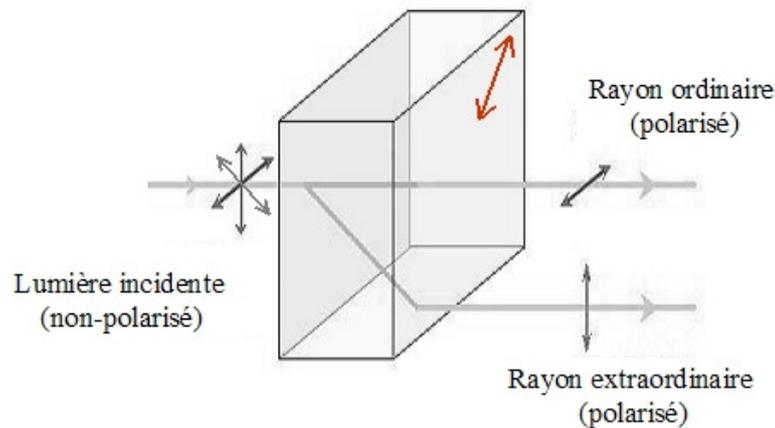


Figure 14-4: Biréfringence ou double réfraction induite par un cristal de calcite. La flèche sur le bord du cristal indique la direction de l'axe optique.

### 14.5 LAMES A RETARD

Une lame à retard est un outil optique capable de modifier la polarisation de la lumière la traversant. C'est un **cristal uniaxial biréfringent** taillé en forme de lame à faces parallèles, l'**axe optique** étant parallèle à la face d'entrée.

Or la polarisation de la lumière peut être décomposée en deux composantes: chaque composante ne se propage pas à la même vitesse selon qu'elle est parallèle ou perpendiculaire à l'**axe optique** (voir schéma ici-bas). Ceci permet de définir deux axes particuliers de la lame: l'**axe lent** et l'**axe rapide** (ceci est aussi la direction de l'axe optique du matériaux).

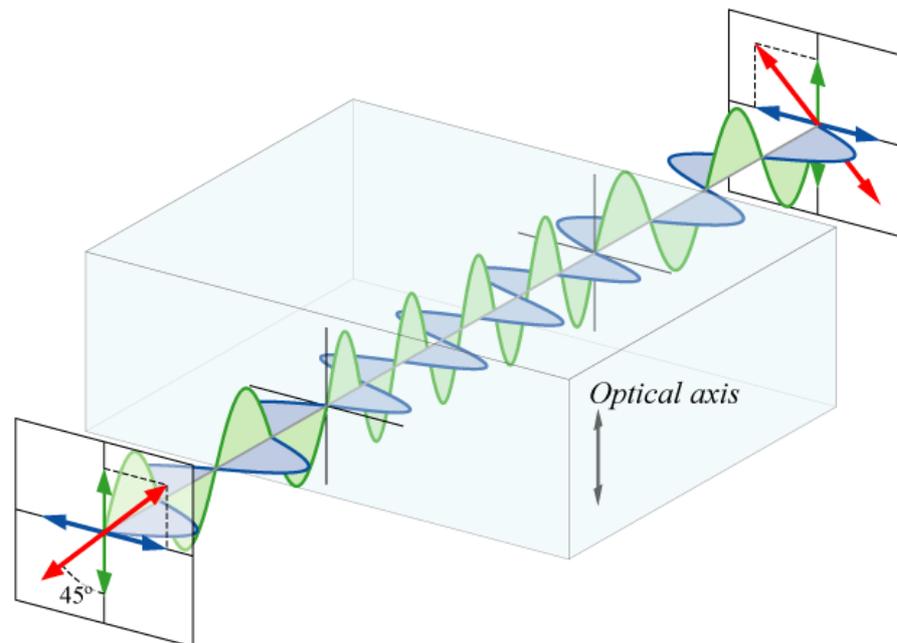


Figure 14-5: Schéma d'une lame demi-onde. La lumière entrant dans la lame peut être décomposée en deux polarisations perpendiculaires (en bleu et vert). A l'intérieur de la lame, la polarisation verte prend un retard par rapport à la bleue. Si l'axe optique (rapide) de la lame fait  $45^\circ$  par rapport la direction de polarisation entrante, la direction sortante aura tourné de  $90^\circ$ . Une lame demi-onde est très pratique pour faire tourner d'un angle quelconque le plan de polarisation d'une lumière polarisé.

Une lame à retard permet donc de retarder une de ces deux composantes par rapport à l'autre, c'est-à-dire de provoquer un **déphasage**.

Ce retard dépend

1. des **deux indices** de réfractions qui caractérisent le matériau utilisé,
2. de l'épaisseur de la lame,
3. de la longueur d'onde de l'onde lumineuse considérée.

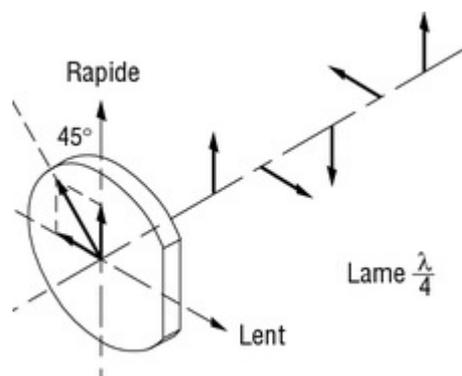
La différence de phase induite dans une lame d'épaisseur  $d$  est égale à:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d \quad (14.7)$$

La plupart des lames à retard sont taillées dans un cristal de façon à ce que l'axe optique soit parallèle à la face de la lame. Ainsi les axes lent et rapide sont également parallèles à la face de la lame. Il existe plusieurs types de ces lames, caractérisées par le déphasage qu'elles produisent entre les deux composantes de la polarisation:

- Une **lame demi-onde**, également notée lame  $\lambda/2$ , crée un déphasage valant  $180^\circ$ , c'est-à-dire un retard d'une moitié de longueur d'onde. L'onde sortant d'une telle lame présente une polarisation symétrique de l'onde entrante par rapport à l'axe optique. Une lame demi-onde est très pratique pour faire tourner d'un angle quelconque le plan de polarisation d'une lumière polarisée.
- Une **lame quart d'onde**, également notée lame  $\lambda/4$ , crée un déphasage de  $90^\circ$ , c'est-à-dire un retard d'un quart de longueur d'onde. Elle permet de passer d'une polarisation rectiligne à une polarisation elliptique ou circulaire, et vice-versa.

Pour obtenir une polarisation circulaire, la lame doit être orientée de sorte que les composantes rapide et lente de l'onde polarisée linéairement soient égales. Le plan de polarisation de l'onde incidente doit donc faire un angle de  $45^\circ$  avec l'axe rapide (et avec l'axe lent), comme sur la figure.



On peut s'assurer de la bonne circularité de la polarisation en faisant tourner un deuxième polariseur servant d'**analyseur** (Figure 14-6): l'intensité de la lumière transmise ne doit pas varier. Si elle varie même légèrement, cela signifie que la lumière est polarisée elliptiquement, et que la lame n'est pas exactement un quart d'onde pour la longueur d'onde utilisée. Cela peut être corrigé (comme dans le cas de la demi-onde) en inclinant légèrement la lame autour de l'un de ses axes, lent ou rapide, tout en contrôlant l'invariabilité de l'intensité avec l'analyseur.

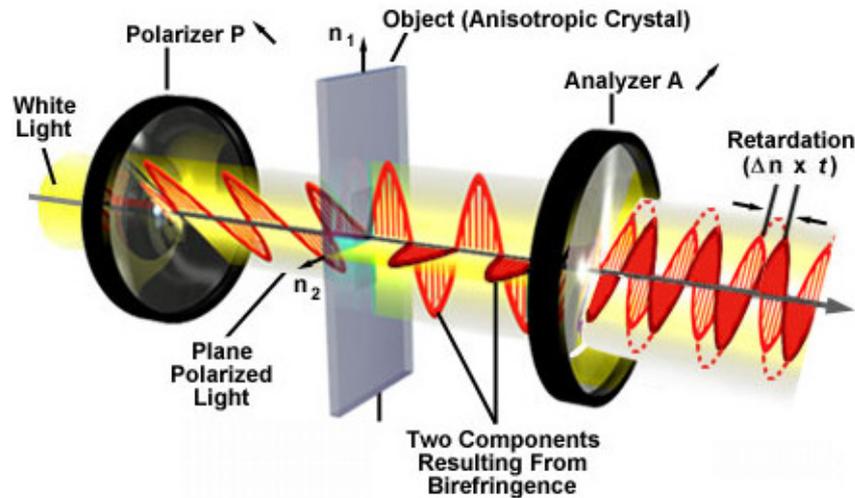


Figure 14-6: Schéma avec polariseur, lame et analyseur.

### Lame à retard entre deux polariseurs, cas général

Dans le cas général aussi, l'effet d'une lame à retard sur un faisceau polarisé par le polariseur P sera mesurable en faisant tourner un 2ème polariseur A servant d'analyseur.

Si on définit:

$\alpha$  = angle entre la direction de polarisation de P et l'axe optique de la lame

$\beta$  = angle entre la direction de polarisation de A et l'axe optique de la lame

$\Delta\varphi$  = différence de phase induite par la lame pour la longueur d'onde  $\lambda$ , voir (14.7).

On utilise une lame à retard à face parallèle placée entre deux polariseurs.

A la sortie du polariseur, on a une polarisation rectiligne  $s = a \cos(\alpha)$ .

Ses composantes sur les axes  $x, y$  de la lame sont:

$$x = a \cos(\alpha) \cos(\omega t) \text{ et } y = a \sin(\alpha) \cos(\omega t)$$

La lame introduit un déphasage  $\Delta\varphi$ .

Après la lame on obtient (sauf cas particuliers) une polarisation elliptique.

$$x = a \cos(\alpha) \cos(\omega t) \text{ et } y = a \sin(\alpha) \cos(\omega t - \varphi) \quad (14.8)$$

L'analyseur permettra de la mettre en évidence.

La polarisation transmise est la somme des polarisations

$$x = a \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\omega t) \text{ et}$$

$$y = a \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\omega t - \varphi) = a \sin(\alpha) \sin(\beta) [\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)]$$

Après quelques calculs on peut obtenir l'intensité de la lumière transmise par l'analyseur A

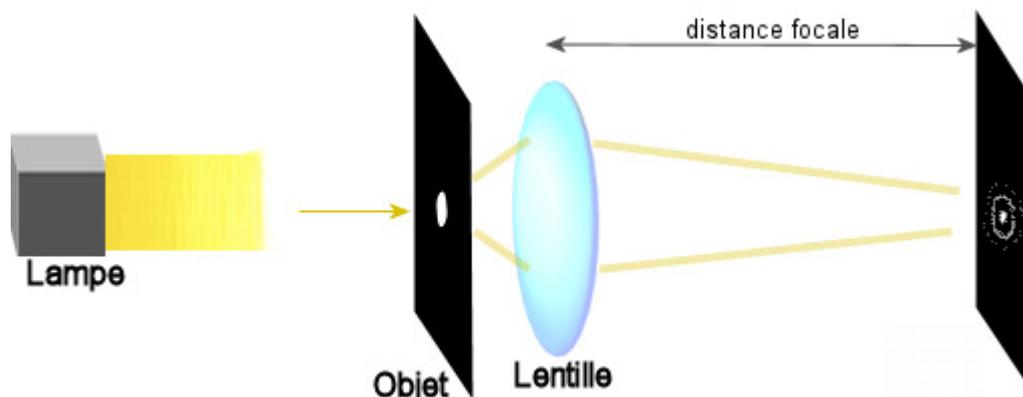
$$I = I_0 [\cos^2(\alpha + \beta) + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \cdot \cos^2(\Delta\varphi/2)] \quad (14.9)$$

## 14.6 EXERCICES

1. Une lumière initialement non polarisée traverse trois polariseurs dont les axes de transmission sont respectivement à  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $60^\circ$ . Quelle est l'intensité relative de la lumière produite, en supposant que les polariseurs soient sans pertes ? **Rep.** 28%
2. Pour quel angle d'incidence, externe et interne, la lumière réfléchie à une interface air-diamant ( $n=2,42$ ) est entièrement polarisée ? **Rep.**  $67,5^\circ$ ,  $22,5^\circ$
3. Calculez l'épaisseur d'une lame demi-onde de mica pour 632,8 nm. Les indices de réfraction sont 1,599 et 1.594. **Rep.** 0.0633 mm

## 15. INTRODUCTION A L'OPTIQUE DE FOURIER

Considérons la configuration de la figure suivante où un faisceau parallèle illumine un objet diffractant. Le motif de diffraction qui apparaît sur un écran placé au plan focal de la lentille correspond à l'approximation de Fraunhofer. On rappelle que la diffraction de Fraunhofer, en principe s'appliquant qu'à l'infini, est aussi valable au plan focal image d'une lentille convergente.



Il se trouve que l'amplitude du champ qui cause le motif de diffraction selon les conditions de Fraunhofer est la **transformée de Fourier bidimensionnelle de l'objet**. La lentille, qui "ramène" la diffraction de Fraunhofer au plan focal image permet de ramener également la transformée de Fourier de l'objet étudié à distance finie.

Ainsi on peut observer la transformée de Fourier de différents objets par la méthode illustrée dans la figure: on place l'objet sur le trajet d'un faisceau de lumière, et on ajoute une lentille convergente après l'objet. En plaçant un écran au plan focal de cette lentille, la figure observée sera la transformée de Fourier de l'objet. Par exemple, si l'objet est un trou circulaire, l'image obtenue sera la tache d'Airy.

Le plan focal de la lentille, où se forme la transformée de Fourier de l'objet, est appelé **plan de Fourier**.

### 15.1 FREQUENCES SPATIALES

La transformée de Fourier est souvent utilisée pour analyser des spectres, comme par exemple en acoustique. En effet, cette transformée permet de passer de l'étude d'une onde selon son évolution dans le temps, à son étude en fréquences. Ces fréquences sont donc dites temporelles, car elles sont conjuguées au temps.

En optique de Fourier, la transformée de Fourier ne s'effectue pas par rapport au temps, mais par rapport à l'espace, et plus précisément par rapport aux coordonnées X et Y dans le plan de l'objet. On a donc défini des fréquences spatiales conjuguées à ces coordonnées.

Une fréquence spatiale est l'analogue des fréquences temporelles, dans le domaine des dimensions spatiales. Lorsque l'on considère un signal variable dans le temps, il est possible de le décomposer en ses différentes composantes fréquentielles, selon son spectre. Chacune de ces composantes le caractérise selon une échelle de temps précise. Par exemple, sa composante à une fréquence  $\nu$  de 10 Hz le caractérise sur des échelles de temps  $\tau = 1/\nu = 0,1$  s.

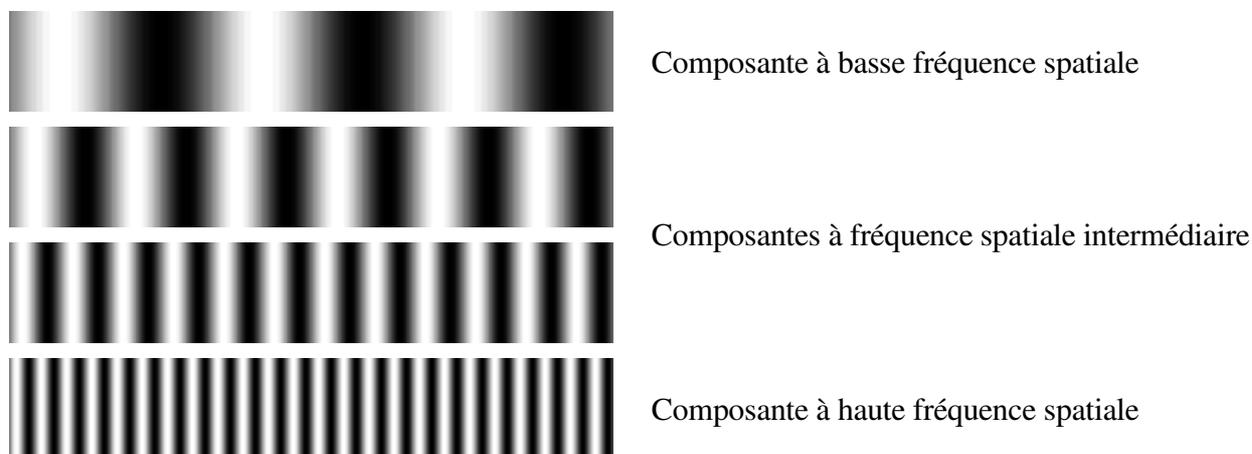
De manière analogue, on définit une fréquence spatiale comme étant l'inverse d'une distance angulaire. Dans ce contexte, une image est un signal bidimensionnel, que l'on peut décomposer selon ses fréquences spatiales.

Considérons par exemple l'image linéaire suivante



Cette image (A) présente des détails de petite taille, de taille intermédiaire et de larges zones. Analyser cette image en termes de fréquences spatiales permet d'isoler telle ou telle composante.

Dans ce cas on trouve que l'image (A) est la résultante de la somme de quatre contributions sinusoïdales:



Si nous considérons maintenant le profil d'amplitude d'un objet étendu, appelé la fonction d'ouverture, ce profil peut être vu comme la superposition de sinusoïdes de pas différents et donc de fréquences spatiales différentes. Le profil d'amplitude fonction d'une variable spatiale peut ainsi être exprimé comme une combinaison linéaire d'un nombre infini de contributions sinusoïdales, chacune étant définie par sa fréquence spatiale. Cette notion est facilement étendue à une fonction définie dans un plan ( $X, Y$  ou  $\rho, \theta$  en coordonnées polaires).

Il existe une forte analogie entre les fréquences temporelles et les fréquences spatiales. Par exemple, on peut obtenir un spectre spatial analogue au spectre temporel habituel: ce spectre spatial, faisant apparaître les fréquences spatiales, est obtenu par la transformée de Fourier spatiale de l'onde incidente. Aussi, comme un signal temporel peut être reconstruit à partir de la donnée de son spectre, il en est de même avec une image que l'on peut reconstituer à l'aide de son spectre spatial.

La principale application de l'optique de Fourier est le **filtrage spatial**, qui consiste à retirer quelques fréquences spatiales afin de modifier l'image de l'objet.

## 15.2 LA TRANSFORMÉE DE FOURIER BIDIMENSIONNELLE

La **transformée de Fourier** est une opération qui transforme une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si  $f(x)$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ , sa transformée de Fourier est la fonction  $F(k)$  donnée par la formule:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

La transformée de Fourier inverse est:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dx$$

La transformée de Fourier est généralisée en deux dimensions  $x$  et  $y$  de la façon suivante:

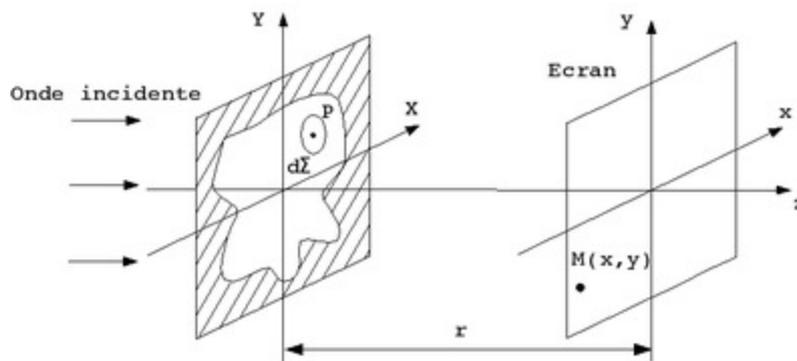
$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Et également la transformée de Fourier inverse en deux dimensions est:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Or nous avons vu que le champ diffracté, dans l'approximation de Fraunhofer, a pour expression générale (13.4):

$$E(x, y) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \iint_{\text{ouverture}} \varepsilon_A(X, Y) e^{ik(Xx + Yy)/r} dX dY$$



Le terme exponentiel devant l'intégrale, ne contribue qu'à la phase en  $(X, Y)$  tandis que le terme en  $1/r$ , qui entraîne la diminution de l'amplitude lorsque nous nous déplaçons de l'ouverture au plan d'observation, est constant sur tout le plan dans l'approximation de Fraunhofer. Dans ces conditions, ce facteur n'influence pas la distribution d'amplitude sur le champ diffracté.

Nous définissons les paramètres de fréquences spatiales,  $k_x$  et  $k_y$ :

$$k_x = \frac{kX}{r}; \quad k_y = \frac{kY}{r} \quad (15.1)$$

Si on introduit la **fonction d'ouverture**:

$$A(X, Y) = \frac{e^{i(\alpha x - kr)}}{r} \cdot \varepsilon_A(X, Y)$$

Cette expression en fait représente la distribution du champ (en phase et amplitude) à l'ouverture.

Le champ diffracté peut être exprimé par l'expression:

$$E(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(X, Y) e^{i(k_x X + k_y Y)} dX dY \quad (15.2)$$

Le champ diffracté dans l'approximation de Fraunhofer est donc la transformée de Fourier de la distribution du champ sur l'ouverture, exprimée par la fonction  $A(x, y)$ .

En d'autres termes, chaque point illuminé dans la figure de diffraction témoigne de la présence d'une fréquence spatiale particulière dans la fonction d'ouverture.

#### En résumé:

La diffraction de Fraunhofer a lieu à l'infini. Une lentille permet de la ramener dans le plan focal appelé plan de Fourier ou plan de transformation, car la lentille transforme des directions en points dans le plan focal. C'est-à-dire que tous les rayons parallèles d'un certain angle sont focalisés sur un certain point. La distribution de champ dans ce plan image est ainsi le **spectre spatial de la fonction d'ouverture**.

Chaque point dans la figure de diffraction indique la présence d'une fréquence spatiale spécifique. Plus petite est la fonction d'ouverture, plus large est le spectre spatial. Notons que ce système permet de générer des transformées quasi instantanées.

### 15.3 FILTRAGE SPATIAL

On a vu qu'à cause de la diffraction de Fraunhofer, un objet éclairé par une onde plane, formera sa transformée de Fourier dans le plan focal d'une lentille. Le spectre selon les fréquences spatiales de l'objet sera ainsi accessible dans ce plan focal appelé alors **plan de Fourier**. On peut alors éliminer certaines de ces fréquences, d'où l'appellation de **filtrage spatial**, par analogie au filtrage temporel, dans lequel on élimine des fréquences temporelles.

Ce phénomène est bien illustré dans le **montage 4f** (voir figure suivante). Un objet est illuminé en transparence par un faisceau parallèle monochromatique. La première lentille permet de créer la transformée de Fourier de l'objet illuminé sur son plan focal (plan de Fourier). Puis une deuxième lentille procède à une seconde transformée sur le spectre de l'objet. Par les propriétés de la transformée, l'image est inversée par rapport à l'objet (comme le prescrit aussi l'optique géométrique).

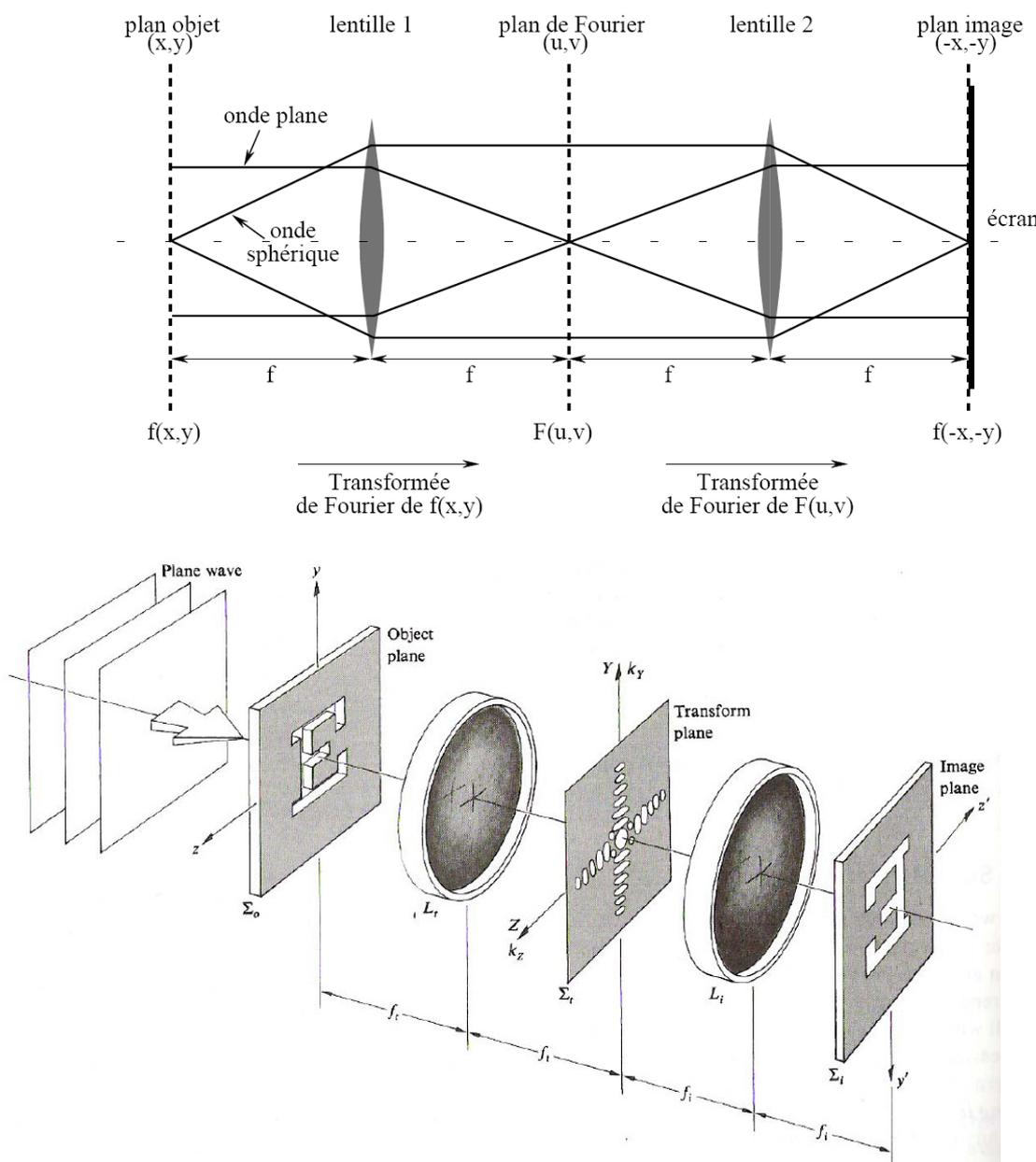


Figure 15-1: Le montage 4f

Une obstruction peut être insérée dans le plan de transformée (masque ou filtre) afin de diminuer ou bloquer certaines fréquences spatiales. Le spectre spatial est ainsi modifié, et on réalise un filtrage spatial.

Si on place un **masque bloquant le centre du spectre**, on va ôter les basses fréquences de l'objet. Cela a pour conséquence d'accentuer les bords de l'objet, il s'agit d'un **filtre passe-haut** (voir Figure 15-2).

Si le masque laisse seulement **passer les fréquences spatiales centrales**, on obtiendra une image lissée de l'objet, les détails de l'image sont supprimés, il s'agit d'un **filtre passe-bas** (Figure 15-3). Ce raisonnement peut également s'appliquer dans le traitement d'images sur ordinateur.

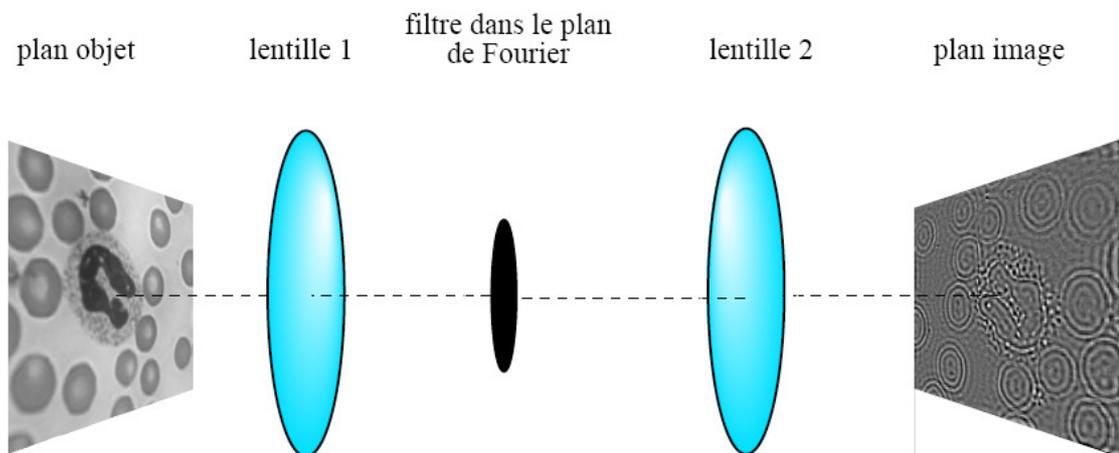


Figure 15-2: Filtre spatial passe-haut

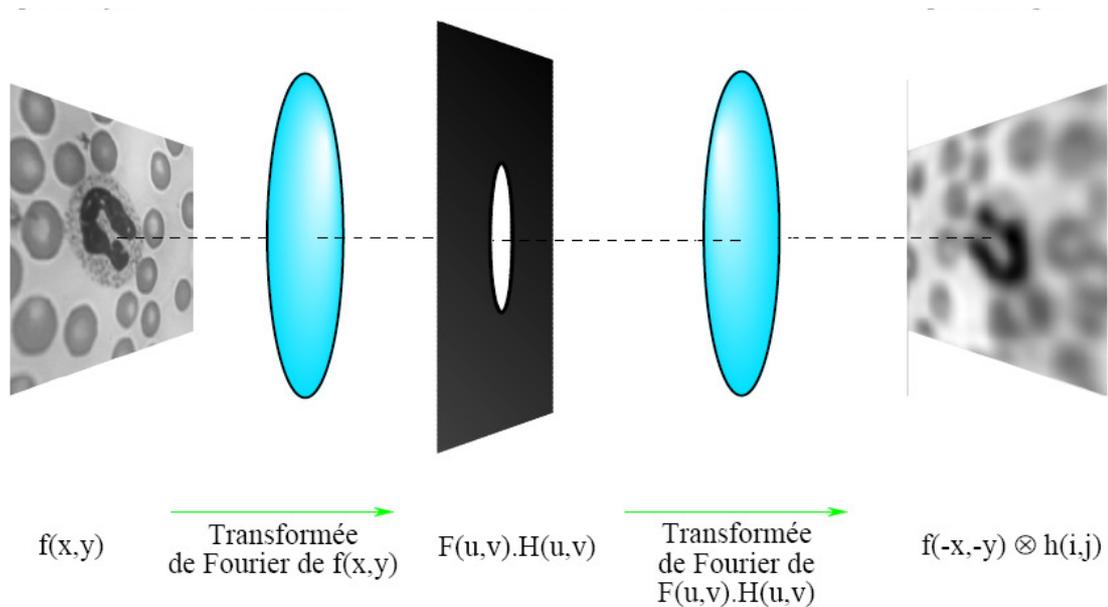


Figure 15-3: Filtre spatial passe-bas

## 15.4 STRIOSCOPIE

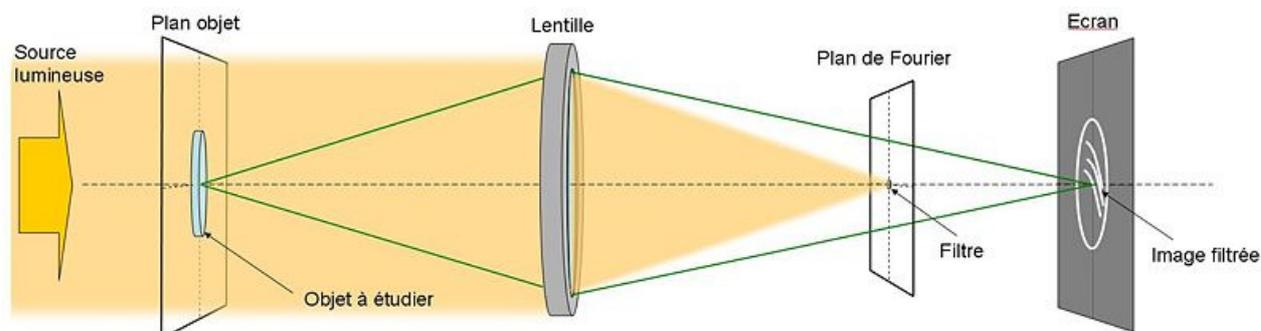
La strioscopie est une méthode optique de visualisation qui permet d'isoler dans une image les détails et petites variations, notamment des faibles variations d'indice comme lors de la compression de l'air ou d'autres fluides. Elle est largement utilisée pour des mesures de mécanique des fluides, bien que son rôle devienne de moins en moins important du fait du développement des simulations par ordinateur.

On peut parfois remarquer les troubles dans l'air au-dessus des radiateurs ou du goudron chaud: la strioscopie permet de visualiser ce type de turbulences avec une bonne précision. En optique, elle donne également lieu à des expériences didactiques spectaculaires, comme la mise en relief d'empreintes sur une plaque de verre ou encore la visualisation de la dissolution du sucre dans l'eau.

D'une manière imagée l'idée fondamentale de cette méthode est d'effectuer un filtrage spatial passe-haut en retirant la lumière qui n'a pas été déviée par l'objet (par exemple le fluide étudié). En effet seuls les rayons déviés par celui-ci correspondent à des turbulences (ou fréquences spatiales hautes en optique).

Pour réaliser cela, il faut d'abord réaliser une image de la source de lumière à l'aide d'une lentille convergente. À l'endroit précis de l'image géométrique passent les rayons qui n'ont pas subi de déviation (fréquences spatiales nulles). On les élimine avec un filtre. Les autres rayons (qui ont été déviés) ne sont pas focalisés au même endroit et peuvent donc passer afin de former une image filtrée. En résumé, on élimine le fond continu de l'image et, conséquemment, les détails ou turbulences de l'objet, qui étaient « noyés » dans ce fond continu, ont un contraste grandement amélioré.

Dans l'exemple des turbulences d'un fluide, l'image formée est noire en absence de turbulence, et lumineuse aux endroits turbulents. Le schéma suivant résume cette méthode.



Le faisceau orange est émis par une source lumineuse. Le faisceau encadré par les rayons verts est la partie de cette lumière qui a été diffractée par l'objet à étudier. La lumière directe de la source, qui converge, est éliminée par le filtre, et les rayons verts forment l'image filtrée de l'objet.

Le filtre utilisé est simplement un *point*, un fil de fer, ou une lame ("couteau de Foucault").

## 16. FONCTIONS DE TRANSFERT EN OPTIQUE

### 16.1 LA FONCTION D'ÉTALEMENT DU POINT (PSF)

La **fonction d'étalement du point** (*Point Spread Function* ou *PSF* en anglais) est une fonction mathématique décrivant la réponse d'un système d'imagerie à une **source ponctuelle**. La PSF est l'équivalent bidimensionnel de la réponse impulsionnelle utilisée en traitement du signal.

La PSF quantifie l'**étalement** du point lumineux dans l'image, considéré comme un défaut. Pour un système optique sans aberrations (i.e. stigmatique) la PSF correspond au profil de diffraction de l'image – figure ci-contre.

Ainsi la PSF est aussi proportionnelle au carré de la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture du système optique.

La nature de la PSF dépend généralement de l'appareil optique, mais en ce qui concerne l'observation du ciel, ce sont les perturbations atmosphériques (dont l'effet est appelé *seeing*) qui dominent sur les effets de diffraction.

Ainsi en astronomie, la **largeur à mi-hauteur**<sup>14</sup>, en anglais *Full Width Half Maximum (FWHM)* de la PSF d'une étoile permet de quantifier la valeur du *seeing*.

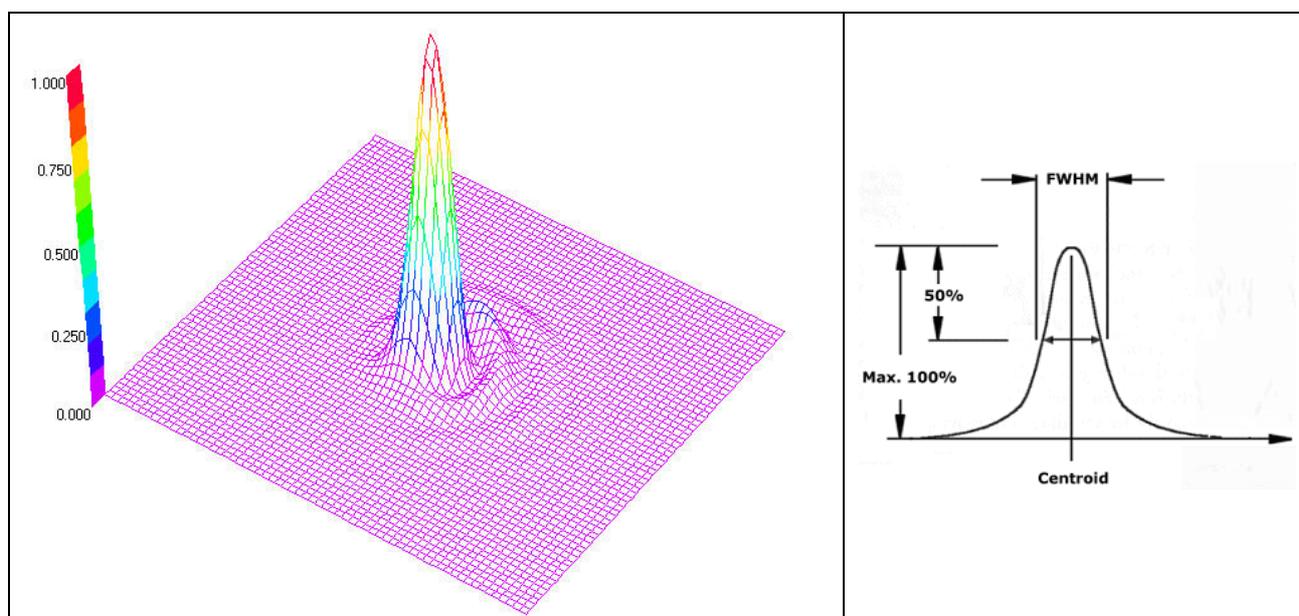
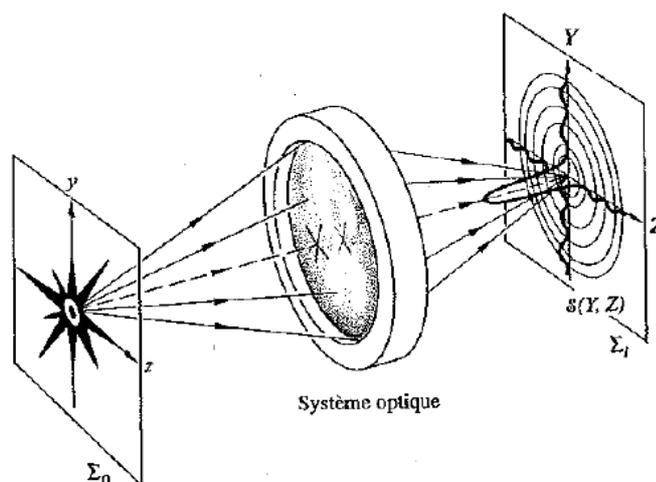


Figure 16.1 Exemple de PSF et définition de la largeur à mi hauteur (*FWHM*).

<sup>14</sup> Pour quantifier la qualité d'un instrument astronomique, la largeur à mi-hauteur de l'image d'un objet ponctuel est rapportée sur le plan objet (le ciel à l'infini) et exprimé en angle, généralement en secondes d'arc (arcsec).

## 16.2 LA FONCTION DE TRANSFERT DE MODULATION (MTF)

Pour comprendre la **fonction de transfert de modulation** (*Modulation Transfer Function*, ou *MTF* en anglais) considérons une mire périodique en luminance.



1. Considérons une mire dont les traits se resserreraient de plus en plus selon une loi mathématique donnée



2. Considérons un autre cas de mire dont les luminances varient de façon sinusoïdale entre deux valeurs extrêmes.

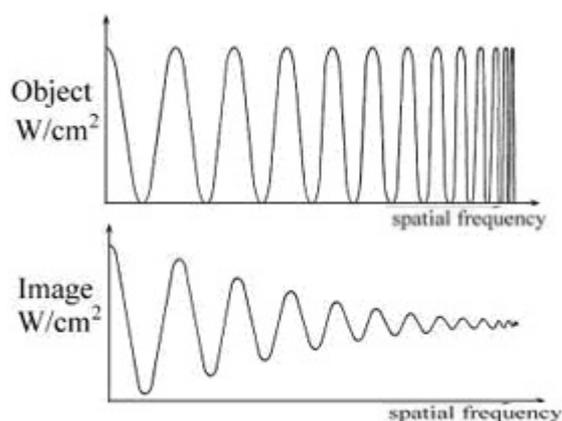


3. En combinant les deux profils, on crée un nouveau type de mire dont les traits de plus en plus serrés ne sont plus alternativement noirs et blancs, mais oscillent selon une loi sinusoïdale entre ce que nous appellerons arbitrairement le « noir pur » et le « blanc pur », en passant par toute la gamme des gris.

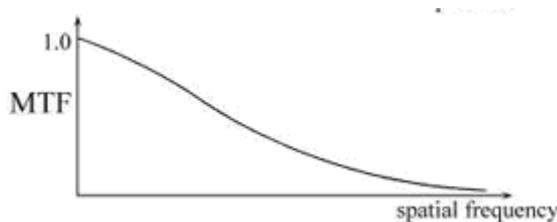
L'image d'une telle mire (3.) produite par un système optique aura en général l'aspect montré ci-contre. Le contraste est presque inchangé pour les faibles fréquences spatiales mais il diminue au fur et à mesure que les lignes se resserrent jusqu'à donner finalement une plage presque uniforme où l'on ne peut plus distinguer aucun détail. Les teintes n'oscillent plus entre le « noir pur » et le « blanc pur » mais entre deux gris de plus en plus proches au fur et à mesure que la fréquence spatiale augmente.



Tout ceci peut se mettre sous la forme de graphiques décrivant la luminance<sup>15</sup> de l'objet et l'éclairement<sup>17</sup> de l'image:



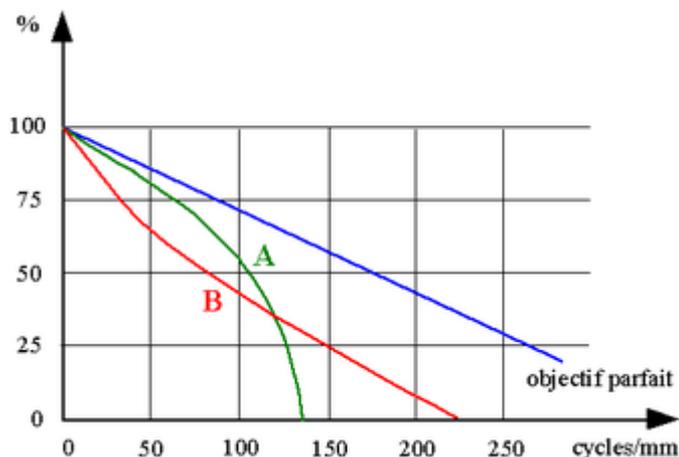
La MTF est le rapport des amplitudes de luminosité image/objet en fonction de la fréquence spatiale.



<sup>15</sup> Rappelons que ces grandeurs sont définies au chapitre 10.

Si on appelle  $A_0$  l'amplitude constante des variations de densité de la mire et  $A$  l'amplitude variable des densités de l'image, le rapport  $A/A_0$ , qui diminue progressivement lorsque les traits se resserrent, caractérise la dégradation progressive du contraste de l'image et permet d'évaluer l'aptitude éventuelle d'un système optique à fournir des images riches en détails visibles.

Le tracé de la courbe qui représente sa fonction de transfert de modulation renseigne bien mieux sur le comportement d'un objectif que la simple mesure du pouvoir séparateur. Ce dernier correspond au point le plus bas, celui où les informations disparaissent, mais n'indique rien de ce qui peut se passer auparavant.



Un système optique *parfait* fournit des images dont la qualité baisse graduellement en raison de la diffraction. La courbe A est celle d'un objectif capable de restituer un contraste élevé malgré un pouvoir séparateur moyen. La courbe B caractérise au contraire un objectif dont le pouvoir séparateur est très bon mais qui donnera cependant à l'usage des images beaucoup plus «molles» que le premier ...

La fréquence spatiale au-delà de laquelle aucune information n'est transmise dans l'espace image et appelée **fréquence de coupure de l'optique**.